A március 7-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Először a következő feladatot tárgyaljuk:

1. Egy estélyen megjelenik 100 házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Mi a valószínűsége annak, hogy egyetlen házaspár sem táncol együtt? Mi ez a valószínűség n házaspár esetén, és mi ennek a valószínűségnek a határértéke, ha $n \to \infty$.

Ennek a feladatnak célja megmutatni, hogy az események halmazokkal való reprezentálása, az eseményalgebrával való számolás, illetve bizonyos alapvető valószínűségi (valójában leszámolással kapcsolatos kombinatorikai) azonosságok segítséget jelentenek bizonyos feladatok megoldásában.

Tekintsünk egy valószínűségi mezőt, melyben ez a feladat megfogalmazható. Számozzuk meg a résztvevő házaspárokat 1 és 100 közötti számokkal. Legyen $\{l_1, \dots, l_{100}\}$ az az elemi esmény, mely azt jelöli, hogy az első férj a l_1-ik a második férj az l_2-ik a századik férj az l_{100}-ik feleséggel táncol.

Defini'aljuk a következő A_j eseményeket:

$$A_j = \text{a } j\text{-ik házaspár együtt táncol.} \quad 1 \le j \le 100.$$

Azaz az A_j esemény azon $(l_1, \dots, l_{100})$ soroztokból áll, melyekre $l_j = j$. Ekkor minket a $P(\overline{A_1 \cap \dots \cap A_{100}}) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_{100})$ valószínűség érdekel.

2.) Mutassuk meg, hogy n házaspár esetében $P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$.

Azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet kiszámoni a $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ valószínűséget, ha ismerjük a $P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k})$ valószínűségeket. A bizonyítandó állítást hívják szita formulának. Lássuk be először ennek a következő speciális esetét:

3.) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

4.) Lássuk be az úgynevezett szita formulát, azaz azt, hogy

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n+1} S_n,$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}), \quad 1 \le k \le n.$$

(Alkalmazhatunk például teljes indukciót a bizonyításban.)

Némileg finomabb érveléssel belátható, a következő állítás is, amelyik

Nem kötelező házi feladat:

Legyenek $A_1, \dots, A_n$ események valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, $S_k = \sum\limits_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k})$, $1 \le k \le n$. Ekkor

$$S_1 - S_2 + \cdots (-1)^{2k} S_{2k-1} \ge P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \ge S_1 - S_2 + \cdots (-1)^{2k+1} S_{2k},$$

ha $2 \le 2k \le n$.

A szita-formula segítségével kapjuk, hogy n házaspár esetében

$$S_k = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Innen adódik, hogy az első feladatban kérdezett valószínűség általános n számra

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) &= 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= 1 - S_1 + S_2 + \cdots + (-1)^n S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Innen következik, hogy

$$P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \quad \text{ha } n \to \infty.$$

Események függetlenségének definiciója: *Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor (teljesen) függetlenek, ha az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaz minden $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ részhalmazára*

$$P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_k}).$$

Események végtelen $A_1, A_2, \dots$ sorozata akkor és csak akkor független, ha tetszőleges pozitív n egész számra az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek.

5. Lássunk példát arra, hogy például $k = 3$ esetében egy A, B és C halmaz esetében a $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ feltétel teljesülése nem elegendő az A, B és C események függetlenségéhez. Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{2, 3, 4\}$, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(\{5\}) = 1 - \frac{4}{3\sqrt{3}}$. Ekkor $ABC = \{2\}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(A \cap B) = P(\{2, 3\}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Ezért $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, de $P(A \cap B) \ne P(A)P(B)$.
6. Ha $A_1, A_2, \dots, A_k$ független események, akkor $\bar{A}_1, A_2, \dots, A_k$ szintén függelten események. Kissé általánosabban: Ha $A^{-1} = \bar{A}$ jelöli az A esemény komplementerét, $A^1 = A$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $1 \le j \le k$, $A_1, \dots, A_k$, független valószínűségi

változók, akkor az $A^{\varepsilon_1}, \ldots, A^{\varepsilon_k}$ valószínűségi változók tetszőleges $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ ± 1 sorozatra.

7. Ha $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ független események, akkor az $A_1 \cap A_2, A_3, \ldots, A_k$ események függetlenek. Továbbá ebben az esetben az $A_1 \cup A_2, A_3, \ldots, A_k$ események is függetlenek.
8. Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer. Az A esemény jelölje azt, hogy a két dobás eredményének az összege 9, a B esemény azt, hogy az első dobás eredménye 1, 2 vagy 3, a C esemény pedig azt, hogy az első dobás eredménye 2, 3 vagy 4. Milyen függetlenségi relációk érvényesek ezen események között?

   Megoldás: Az A esemény azt jelenti, hogy a (3,6), (4,5) (5,4), (6,3) dobássorozatok valamelyike következik be. Ennek valószínűsége $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. A B és C események valószínűsége $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Az $A \cap B$ esemény azt jelenti, hogy a (3,6) dobássorozat következik be. Ennek valószínűsége $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Az $A \cap C$ azt jelenti, hogy a (3,6) (4,5) események valamelyike következik be. Ennek valószínűsége $P(A \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Ezért $P(A \cap C) = P(A)P(B)$, de $P(A \cap B) \neq P(A)P(c)$. Ez azt jelenti, hogy az A és C események függetlenek, de az A és B események nem függetlenek. Hasonlóan a $B \cap C$ esemény azt jelenti, hogy az első dobás eredménye 2 vagy 3, ezért $P(B \cap C) = \frac{1}{3} \neq P(B)P(C)$. Tehát a B és C események sem függetlenek.