A JAVÍTÓ DOLGOZAT FELADATAI

(A programozó matematikus gyakorlaton)

Megjegyzés: Abban az esetben, ha egy megkérdezett fogalom definícióját több (egymással ekvivalens) módon lehet megadni, akkor ezek mindegyike jó válasznak minősül.

1. Egy szabályos kockát feldobunk sokszor egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. dobásban jelenik meg a hatos harmadszor?
2. Egy diáknak egy tesztlapot kell kitöltenie a vizsgán, melyben három lehetséges válasz között kell választania. Egy adott kérdésre p, $0 \le p \le 1$, valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha tudja a helyes választ, akkor a jó helyet jelöli be, ha nem akkor egyforma valószínűséggel tölti ki a lehetséges három válasz valamelyikét. Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy tudja egy kérdésre a helyes választ feltéve, hogy erre a kérdésre a jó választ jelölte be?
3. Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = e^{-x}$, ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$ ha $x < 0$. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
4. Egy pénzdarabról ellenőrizni akarjuk, hogy igaz-e az a hipotézis, mely szerint ez az érme legalább $\frac{3}{4}$ valószínűséggel esik a fej és legfeljebb $\frac{1}{4}$ valószínűséggel az írás oldalára. Ennek érdekében feldobjuk a pénzdarabot 30 000 alkalommal, és a következő döntési szabályt hozzuk. Választunk egy k számot, és akkor fogadjuk el a hipotézist helyesnek, ha legalább k fejdobás történt. Legalább mekkorának kell válassztanunk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy egy a hipotézist teljesítő pénzdarab esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy a hipotézis teljesül? (A feladat megoldásában használjuk a mellékelt normális eloszlásfüggvény táblázatot.)
5. Mikor mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn adott $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egymástól függetlenek?
6. Mikor mondjuk, hogy egy ξ valószínűségi változónak az $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, függvény a sűrűségfüggvénye?

A dolgozat feladatainak megoldása:

1. $\binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}$. Ez az esemény ugyanis akkor következik be, ha egyrészt az első 19 dobásban két hatos és 17 nem hatos dobás következik be, és ennek valószínűsége $\binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}$, másrészt a húszadik dobás hatos, aminek a valószínűsége $\frac{1}{6}$. Továbbá ez a két esemény független egymástól.
2. A keresett valószínűség $\frac{p}{p+\frac{1}{3}(1-p)} = \frac{3p}{2p+1}$. Ugyanis legyen A az az esemény, hogy a diák tudja a helyes választ, B az az esemény, hogy helyesen válaszol. Ekkor minket a $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Továbbá

$P(AB) = P(A) = p$, mert $A \subset B$, és $P(B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = p + \frac{1}{3}(1-p)$, ahol $\bar{A}$ az A halmaz komplementerét jelöli.

3. $E\xi = 1$ és $\operatorname{Var}\xi = 1$, mert parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \left[x(-e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = \left[x^2(-e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 2,$$

és $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1$.

4. Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 30\,000$, $S = S_{30000} = \sum\limits_{j=1}^{30\,000} \xi_j$. Ha a fejdobás eredményének valószínűsége pontosan $\frac{3}{4}$, $E\xi_j = \frac{3}{4}$, $E\xi_j^2 = \frac{3}{4}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{3}{16}$, $ES = 30\,000 E\xi_j = 22\,500$, $\operatorname{Var} S = 30\,000 \operatorname{Var}\xi_j = 5625 = 75^2$. Innen és a centrális határeloszlástételből,

$$P(S > k) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} > \frac{k - 22\,500}{75}\right) = 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{k - 22\,500}{75}\right)$$
$$\sim 1 - \Phi\left(\frac{k - 22\,500}{75}\right).$$

Válasszuk a k számot úgy, hogy a fenti valószínűség körülbelül 0.9 legyen. Ekkor a $\Phi\left(\frac{k-22\,500}{75}\right) = 0.1$ vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Phi\left(\frac{22\,500-k}{75}\right) = 0.9$ egyenletet kell teljesítenünk. A normális eloszlás-táblázat alapján $\frac{22\,500 - k}{75} \sim 1.28$, ami azt jelenti, hogy $k = 22\,500 - 75 \times 1.28$ és $p = \frac{3}{4}$ esetén annak valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $k = 22\,500 - 75 \times 1.28 = 22\,212$ és $p = \frac{3}{4}$ esetében annak valószínűsége, hogy legalább ennyi fejdobás történik körülbelül 0.9. Ha $p \ge 34$, akkor ez a valószínűség nagyobb. Ezért a $k = 22\,212$ helyes választás.

5. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha

$$P(\xi_1 < x_1,\, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1)P(\xi_2 < x_2)\cdots P(\xi_n < x_n)$$

minden valós $x_1, \dots, x_n$ számra.

1. Megjegyzés: Szinte mindegyik beadott dolgozatban $P(\xi_1)$ kifejezés szerepelt. Ezzel nagyon elégedetlen voltam, mert ennek a kifejezésnek nincs értelme.

2. Megjegyzés: Lehetett volna más definiciót is adni, melyet teljes értékű válasznak fogadtam volna el. Nevezetesen,

$$P(\xi_1 \in B_1,\, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2)\cdots P(\xi_n \in B_n)$$

a számegyenes minden (mérhető) $B_1, \dots, B_n$ részhalmazára. A valószínűségszámítás egyik nem triviális eredménye alapján ez a két lehetséges definició ekvivalens. Az eredetileg megadott definició azért rokonszenvesebb a számomra, mert az ott szereplő azonosságok közvetlen ellenőrzése egyszerűbb.

6. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f(u)$, $-\infty < u < \infty$, függvény, ha $P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.

   Megjegyzés: A képletben szereplő $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezik.