A november 7-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Beszéljük meg a valószínűségszámítás talán legfontosabb eredményét illetve annak néhány alkalmazását.

Először vezessük be a standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény definicióját és foglamzzunk meg egy eredményt ezzel kapcsolatban.

Standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha $P(\xi < x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$. Ezen $\Phi(x)$ eloszlás $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűségfüggvénynek hívják.*

Tétel. *A standard normális eloszlásfüggvénynek nevezett*

$$P(\xi < x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$$

függvény valóban eloszlásfüggvény, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 1.$

1. Egy ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke nulla, szórásnégyzete egy, azaz

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 0, \quad \text{és} \quad E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 1.$$

Megoldás: Mivel $u\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ páratlan függvény, ezért

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 0.$$

Másrészt, parciális integrálással $f(u) = u$, és $g(u) = u\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u^2/2}}{du}$ választással

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} u e^{-u^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 1.$$

Centrális határeloszlástétel. *Legyenek ξ_j, $j = 1, 2, \dots$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, $E\xi_1 = m$,* $\operatorname{Var}\xi_1 = \sigma^2$, *$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du.$$

minden $-\infty < x < \infty$ *számra.*

Annak érdekében, hogy a centrális határeloszlástételt jól tudjuk alkalmazni tárgyaljuk meg külön a következő egyszerű feladatot.

2. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $P(\xi < -x) = P(\xi > x) = 1 - \Phi(x)$, $P(|\xi| < x) = P(\xi < x) - P(\xi < -x) = 2P(\xi < x) - 1 = 2\Phi(x) - 1$, ha $x \ge 0$, ahol $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$ a standard normális eloszlásfüggvény.

3. Tekintsünk egy szabályos pénzdarab 10 000 egymás utáni (független) feldobásából származó fej-írás sorozatot. Adjunk becslést a centrális határeloszlástétel segítségével annak valószínűségére, hogy a fej-dobások számának eltérése a várt 5000 számtól legalább 100-zal, illetve legalább 200-zal eltér!

   Megoldás: Vezessük be a ξ_j, $\le j \le 10\,000$ valószínűségi változókat, melyekre $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás. Ekkor ξ_j, $1 \le j \le 10\,000$ független valószínűségi változók, $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{4}$, és a $P\left(\left|\sum\limits_{j=1}^{10000} (\xi_j - E\xi_j)\right| > 100\right)$ és $P\left(\left|\sum\limits_{j=1}^{10000} (\xi_j - E\xi_j)\right| > 200\right)$ valószínűségekre kell becslést adnunk. A centrális határeloszlástétel szerint $P\left(\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{10000} (\xi_j - E\xi_j)}{\sqrt{10000 \cdot \frac{1}{4}}} > u\right) \sim 1 - \Phi(u)$. Innen kapjuk, hogy az első valószínűség kiszámításához az $u = \pm\frac{100}{\frac{1}{2}\cdot 100} = \pm 2$ értékeket kell tekinteni, és a vizsgált valószínűség közelítőleg $(1 - \Phi(2)) + \Phi(-2) = 2(1 - \Phi(2)) \sim 2(1 - 0.97720) = 0.0456$. A második valószínűség hasonlóan körülbelül $2(1 - \Phi(4)) \sim 0$, (az első 4 tizedesjegy 0).

4. Számoljuk ki egy $(1, p)$ paraméterű ξ negativ binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. (Azaz $P(\xi = k) = (1 - p)p^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$).

   Ha ξ $(1, p)$ paraméterű negativ binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor

   $$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)p^{k-1} \qquad E\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1 - p)p^{k-1}$$

   Ezen összegek egyik lehetséges kiszámolása: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1 - x}$, ha $|x| < 1$. Két egymás utáni deriválással kapjuk, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$ és $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \dfrac{2}{(1 - x)^3}$. Innen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = \dfrac{1}{(1 - p)^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 p^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} + p \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k -$

$1)p^{k-2} = \frac{1}{(1-p)^2} + \frac{2p}{(1-p)^3}$, és $E\xi = \frac{1}{1-p}$, $E\xi^2 = \frac{1}{1-p} + \frac{2p}{(1-p)^2}$. Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{p}{(1-p)^2}$.

5. Vegyünk egy olyan pénzdarabot, mely $\frac{2}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel az írás oldalra. Ezt a pénzdarabot annyiszor dobjuk fel, ameddig megjelenik 1200 fej dobás. Mi annak a valószínűsége, hogy az elvégzett dobások száma 1680 1430 küzé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést.

   Az elvégzett dobások száma negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 1200$, $p = \frac{1}{3}$ paraméterekkel, és egy ilyen valószínűségi változónak ki lehet számolni a pontos eloszlását, azaz azt, hogy milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel. Elvileg, ez lehetőséget ad a kívánt valószínűség kiszámítására egy bonyolult összeg kiszámításénak a segítségével. Ennél hasznosabb becslést tudunk kapni a következő érvelés segítségével, mely a kívánt valószínűséget jó pontossággal kiszámítja a centrális határeloszlástétel segítségével.

   Jelölje ξ_j, $2 \le j \le 1200$ a $j-1$-ik és j-ik fejdobás közötti dobások számát (a j-ik fejdobást beleszámítjuk a $j-1$-iket viszont nem számítjuk bele e dobások közé), és legyen ξ_1 az első fejdobásig (ezt is beleszámítva) elvégzett dobások száma. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, negatív binomiális eloszlásúak $n = 1$, $p = \frac{1}{3}$ paraméterekkel, és minket a $P(1680 < \xi_1 + \cdots + \xi_{1200} < 1830)$ valószínűség érdekel. Megmutattuk a 4. feladatban), hogy $E\xi_j = \frac{1}{1-p} = \frac{3}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{3}{4}$. Ezért a centrális határeloszlástétel alapján $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{1200}$ jelöléssel minket a $P\left(-4 < \frac{\eta - 1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}} < 1\right)$ valószínűség érdekel. A centrális határeloszlástétel alapján $P\left(-4 < \frac{\eta - 1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}} < 1\right) \sim \Phi(1) + \Phi(4) - 1 \sim \Phi(1)$.

   Házi feladat.

   Egy szabályos dobókockát feldobunk 2700 alkalommal egymástól függetlenül, és összeszámoljuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 420 és 720 közé esik.

   Segítség: Vezessük be a $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2 $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5, $1 \le j \le 2700$. Ekkor minket a $P\left(420 < \sum\limits_{j=1}^{2700} \xi_j < 720\right)$ valószínűség érdekel. Számítsuk ki a ξ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét, és alkalmazzuk a centrális határeloszlástételt.

6. Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

7. Legyen birtokunkban 100 lámpa, melyek mindegyike egymástól független időtartamig működik, élettartamuk pedig exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (A lámpák élettartamának exponenciális eloszlása természetes feltételezés.) Egy termet bevilágítunk ezen lámpák valamelyikével, majd amikor az kiégett új lámpát használunk fel. Adjunk jó becslést arra, hogy a lámpák összélettartama legalább 1150 óra.

Jelölje ξ_j a j-ik lámpa éléttartamát, $1 \le j \le 100$. Ekkor a $P(\xi_1+\cdots+\xi_{100} > 1150)$ valószínűségre kell jó becslést adnunk, ahol az összegben független exponenciális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. Vezessük be az $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$ jelölést.

Kiszámoltuk, hogy jelen esetben $E\eta = mE\xi_1 = \frac{m}{\lambda} = 1000$, $\operatorname{Var}\eta = \frac{m}{\lambda^2} = 10000$ ($m = 100$ és $\lambda = \frac{1}{10}$ választással). Ezért a centrális határeloszlástétel szerint $\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} = \frac{\eta - 1000}{100}$ jó közelítéssel standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150) = P\left(\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} > 1.5\right) \sim 1 - \Phi(1.5)$.