**Az október 10-i gyakorlat témája**
*Rövid összefoglaló*

Először a következő feladattal foglalkoztunk, mely a polinomiális eloszlás megértését segíti.

1. Van $n$ darab golyónk, melyeket egymástól függetlenül bedobunk $k$ darab urnába. A golyók az első urnába $p_1$ a második urnába $p_2, \dots$ , a $k$-ik urnába $p_k$ valószínűséggel esnek, $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. Mutassuk meg, hogy annak valószínűsége, hogy az első urnába $m_1$, a második urnába $m_2, \dots$ , a $k$-ik urnába $m_k$ golyó esik, $\sum_{j=1}^{k} m_j = n$,

$$\frac{n1}{m_1!m_2!\cdots m_k!}p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}.$$

*Megoldás:* Számozzuk meg a golyókat, 1-től $n$-ig, és számoljuk meg hány különböző módon lehet ezeket a golyókat úgy elhelyezni, hogy az első urnába pontosan $m_1$, a második urnába $m_2, \dots$ a $k$-ik urnába pontosan $m_k$ golyót helyezünk el. Nézzük meg, hányféleképp választhatjuk ki az első urnába tett $m_1$ golyót. Az első golyót $n$, a második golyót $n-1, \dots$ az $m_1$-ik golyót $n-m_1+1$ féleképpen választhatjuk. Ez összesen $n(n-1)\cdots(n-m_1+1$ lehetőséget jelent. Ezután a második urnába $(n-m_1)\cdots(n-m_1-m_2+1)$ módon választhatunk $m_2$ golyót. Tovább folytatva összesen $n!$ lehetőséget kapunk. Viszont az elhelyezéseket multiplicitással számoltuk. (Megkülünböztettük például azt a választást, amikor először a második majd az ötödik golyót tesszük az első urnába attól, amikor először az ötödik majd a második golyót tesszük az első urnába.) Minden egyes elhelyezést $m_1!m_2!\cdots m_k!$ multiplicitással számoltunk. Ezért az összes lehetséges választások száma

$$\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}.$$

Továbbá, egy előírt elrendezés bekövetkezésének a valószínűsége, azaz annak hogy megmondjuk melyik urnába dobjuk az első, a második és így tovább az $n$-ik golyót úgy hogy $m_1$ golyót dobunk az első, ... $m_k$ golyót dobunk a $k$-ik urnába $p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}$. Innen következik az állítás.

(A múlt gyakorlaton egy más módon végeztük el a fenti összeszámlálást. Az első unába $m_1$ a többibe együttvéve $n-m_1$ golyót $\binom{n}{m_1}$ féleképpen helyezhetek el. A megmaradt $n-m_1$ golyóból $\binom{n-m_1}{m_2}$ féleképpen válaszhatok $m_2$ golyót a második urnába, és így tovább. Az összes lehetséges választás száma

$$\prod_{j=1}^{k}\binom{n-(m_1+\cdots+m_{j-1})}{m_j} = \frac{n!}{m_1!\cdots m_k!}.$$

2.
$$(x_1+\cdots+x_k)^n=\sum_{\substack{m_1,\dots,m_k \text{ nem negatív egész számok}\\ m_1+\cdots+m_k=n}} x_1^{m_1}\cdots m_k^{m_k}.$$

(Ezt az eredményt hívják polinomiális tételnek.)

Az $(x_1+\cdots+x_k)^n=(x_1+\cdots+x_k)\cdots(x_1+\cdots+x_k)$ szorzatban elvégezzük a szorzásokat. Csak olyan $x_1^{m_1}\cdots m_k^{m_k}$ tagok jelennek meg, melyekre $\sum\limits_{j=1}^{k} m_j=n$, és egy ilyen tag együtthatója a megadott mennyiség az előző feladat megoldása alapján.

**Diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értékének definiciója.** *Legyen $\xi$ (diszkrét eloszlású) valószínűségi változó, amelyik megszámlálható sok $x_1,x_2,\dots,$ értéket vesz fel. Ekkor a $\xi$ valószínűségi változó várható értéke*

$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty} x_kP(\xi=x_k).$$

**Valószínűségi változó szórásnégyzetének definiciója.** *Egy $\xi$ valószínűségi változó szórásnégyzete* $\operatorname{Var}\xi=E\left(\xi-E\xi\right)^2$. *Be lehet látni, hogy* $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-\left(E\xi\right)^2$.

3.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 100-szor egymás után. Számítsuk ki a fejdobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

*Megoldás:* A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy $k$ fejdobás következik be, $0\le k\le 100$, $p_k=\binom{100}{k}2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi=\sum\limits_{k=0}^{100}k\binom{100}{k}2^{-100}$, ahol $\xi$ jelöli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Továbbá $E\xi^2=\sum\limits_{k=0}^{100}k^2\binom{100}{k}2^{-100}$, a szórásnégyzet pedig $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-\left(E\xi\right)^2$. Ezeket az összegeket közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, $k\binom{100}{k}=100\binom{99}{k-1}$, $E\xi=\sum\limits_{k=0}^{100}k\binom{100}{k}2^{-100}=50\sum\limits_{k=0}^{99}\binom{99}{k}2^{-99}=50\left(\frac12+\frac12\right)^{99}=50$. Továbbá, $k^2\binom{100}{k}=[k(k-1)+k]\binom{100}{k}=100\cdot 99\cdot\binom{98}{k-2}+100\cdot\binom{100}{99}$, $E\xi^2=\frac14\cdot 100\cdot 99\cdot\sum\limits_{k=0}^{98}\binom{98}{k}2^{-98}+\frac12\cdot 100\cdot\sum\limits_{k=0}^{99}\binom{99}{k}2^{-99}=25\cdot 99+50$, $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi^2)=25$.

Valójában a vizsgált várható értéket és szórásnégyzetet egyszeűbben is kiszámíthatjuk néhány fontos eredmény segítségével, melyeket most felidézünk.

**Tétel.** *Ha $\xi$ diszkrét értékű valószínűségi változó, $P(\xi=x_k)=p_k$, $k=1,2,\dots,$ $f(x)$ valamilyen függvény, akkor* $Ef(\xi)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_kf(x_k)$.

**Tétel.** *Ha* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, akkor* $E(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = E\xi_1 + \cdots + E\xi_n$.

*Megjegyzés;* Ez az eredmény tetszőleges valószínűségi változókra igaz. Nem követeltük meg például azt, hogy az összeadandók függetlenek legyenek.

**Tétel.** *Ha* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *független valószínűségi változók, akkor* $\operatorname{Var}(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \operatorname{Var}\xi_1 + \cdots + \operatorname{Var}\xi_n$.

**Tétel.** $E(a\xi + b) = aE\xi + b$, $\operatorname{Var}(a\xi + b) = a^2 \operatorname{Var}\xi$ *minden valós* $a$ *és* $b$ *számra.*

*Második megoldás:* Vezessük be a $\xi_j$ valószínűségi változókat, $\xi_j = 1$, ha a $j$-ik dobás eredménye fej $\xi_j = 0$, ha a $j$-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} E\xi_j$, $\operatorname{Var}\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{4}$, $1 \le j \le 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$.

4.) Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Tekintsük a dobások eredményeinek összegét. Számítsuk ki ennek az összegnek

a.) Várható értékét,

b.) Szórásnégyzetét.

A negyedik feladat hasonlóan tárgyalható. Ekkor annak valószínűségét, hogy a dobások üsszegének értéke egy adott szám rendkívül fáradságos lenne kiszámolni. Viszont a második módszer egyszerűen alkalmazható ebben az esetben is. Legyenek $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változók, melyekre $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és szórásnégyzet $E\sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} E\eta_j$, $\operatorname{Var}\sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\eta_j$. (A második reláció felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.) $E\eta_j = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$, $E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$, $\operatorname{Var}\eta_j = \frac{35}{12}$, $E\xi = 350$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{3500}{12}$.

*Házi feladat:*

Egy szabályos dobókockát feldobunk százszor egymás után. Tekintsük a páros dobások eredményeinek az összegét. (Azaz a páratlan dobások eredményét nem vesszük figyelembe, a többi dobás eredményét pedig összegezzük.) Számítsuk ki ennek az összegnek a várható értékét és szórásnégyzetét.

5. Egy kulcs-csomón van harminc számunkra megkülönböztethetetlen kulcs, melyek közül az egyik nyitja a zárat. Véletlenszerűen egymás után kipróbáljuk a kulcsokat, egészen addig, amig sikeül kinyitni a zárat. Mi a szükséges kisérletek számának a várható értéke és szórásnégyzete?

*Megoldás:* Jelölje $\xi$ azt a valószínűségi változót, mely $k$-val egyenlő akkor, ha a $k$-ik kisérletre sikerül kinyitni a zárat. Ekkor $P(\xi = k) = \dfrac{1}{30}$, $1 \le k \le 30$. A minket érdeklő mennyiségek $E\xi = \sum_{k=1}^{30} k\frac{1}{30} = \frac{30\cdot 31}{2\cdot 30} = 15.5$, és $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$, $E\xi^2 = \frac{1}{30}\sum_{k=1}^{30} k^2 = \frac{30\cdot 31\cdot 61}{6\cdot 30} = \frac{31\cdot 61}{6}$.