Az október 31-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

5. Egy kulcs-csomón van harminc számunkra megkülönböztethetetlen kulcs, melyek közül az egyik nyitja a zárat. Véletlenszerűen egymás után kipróbáljuk a kulcsokat, egészen addig, amig sikeül kinyitni a zárat. Mi a szükséges kisérletek számának a várható értéke és szórásnégyzete?

   Ezt a feladatot tárgyaltuk a múlt órán. Most megbeszélünk egy másik lehetséges megoldást.

   Második megoldás: Vezessük be, a következő ξ_k valószínűségi változókat: $\xi_k = 0$, ha a k-ik kisérletben megpróbált kulcs nem nyitja a zárat, (akkor is, ha nincs k-ik kisérlet), $\xi_k = k$, ha a k-ik kulcs nyitja a zárat. Ekkor $\xi = \sum\limits_{k=1}^{30} \xi_k$, $E\xi = \sum\limits_{k=1}^{30} E\xi_k = \frac{k}{30}$, $E\xi = \sum\limits_{k=1}^{30} \frac{k}{30}$. A ξ_k szórásnégyzetét kissé nehezebb ezen módszer segítégével kiszámolni, mert a ξ_k valószínűségi változók nem függetlenek. Viszont, ha tudjuk, hogyan kell kiszámolni általános nem feltételenül független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetét, akkor ez is lehetséges. Ezért felidézzük a szükséges eredeményt.

Tétel. *Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, akkor*

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var}\xi_j + 2 \sum_{1\le j<k\le n} (E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k).\\ &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var}\xi_j + \sum_{1\le j,k\le n,\ j\ne k} (E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k).\end{aligned}$$

Megjegyzés: Ha ξ és η két valószínűségi változó, akkor ezek kovarianciája $\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E\xi\eta - E\xi E\eta$. A kovariancia egy természetes mérése annak, hogy két valószínűségi változó milyen mértékben függ össze. Ez a mennyiség szerepelt az összeg szórásnégyzetének kifejezésében. Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = 0$.

A Tétel bizonyítása.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) &= E\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right)^2 - \left(E\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right)^2 = E\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \xi_j\xi_k\right) - \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} E\xi_j E\xi_k\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2\right) + 2 \sum_{1\le j<k\le n} (E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k).\end{aligned}$$

és $E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \operatorname{Var}\xi_j$.

Jelen esetben $\xi_j\xi_k = 0$, ha $j \neq k$. Ezért $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = -E\xi_j E\xi_k$, ha $j \neq k$, $\mathrm{Var}\,\xi_k = E\xi_k^2 - (E\xi_k)^2$. Innen $\mathrm{Var}\,\xi = \mathrm{Var}\left(\sum\limits_{k=1}^{30} \xi_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{30} E\xi_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{30} E\xi_k\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{30} \frac{k^2}{30} - \left(\sum\limits_{k=1}^{30} \frac{k}{30}\right)^2$.

2. Egy urnában 20 piros és 80 fehér golyó van. Visszatevés nélköl kihúzzuk a golyókat. Mi annak a valószínűsége, hogy az első golyó piros? Annak, hogy az ötödik kihúzott golyó piros? Annak, hogy az első és második kihúzott golyó piros? Annak, hogy a második és ötödik kihúzott golyó piros?

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy az első kihúzott golyó piros $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Annak valószínűsége, hogy az első és második kihúzott golyó piros $\frac{20}{100}\frac{19}{99}$. Azt állítjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy az ötödik (vagy akármelyik) kihúzott golyó piros ugyanannyi mint annak a valószínűsége, hogy az első kihúzott golyó piros. Annak a valószínűsége, hogy a második és ötödik (általában az i-edik és j-ik kihúzott golyó piros, $i \neq j$, ugyanannyi mint annak a valószínűsége, hogy az első és második golyó kihúzott golyó piros.

   Ennek belátása érdekében tekintsük annak a valószínűségét, hogy kihúzva az összes golyót egy előírt (20 piros és 80 fehér színű golyóból álló sorozatot kapok. Ennek valószínűsége $\frac{20!80!}{100!}$. A lényeg az, hogy ugyanaz a valószínűség jelenik meg minden lehetséges húzássorozat esetében. Annak valószínűsége, hogy a j-ik húzás piros megegyezik az összes olyan sorozatok száma szorozva ezzel a valószínűséggel, ahol a j-ik helyen piros van. Hasonlóan annak a valószínűsége, hogy az i-ik és j-ik helyen van piros, $i \neq j$, nem függ az i és j számtól, mert az ilyen sorozatok száma nem függ az i és j indextől.

Az előbbi érvelés finomítása alkalmazható kissé általánosabb esenben is, amikor két k és l egész számot rögzítek, és ha kihízok egy fehér golyót, akkor k darab fehér golyót dobok vissza, ha piros golyót húzok ki, akkor l piros golyót dobok visszza, ($k = l = 0$ választás is megengedett). Vegyük észre, hogy ebben az általánosabb esetben is egy előírt húzássorozat valószínűsége csak a sorozatban szereplő fehér és piros golyók számától függ, és az előző érvelés ebben az esetben is működik.

3. Egy urnában 20 piros és 80 fehér golyó van. Visszatevés nélköl kihúzzuk 10 golyót. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?

   Megoldás: Jelölje ξ_j azt a valószínűségi változót, melyre $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás piros, 0 ha a j-ik húzás fehér. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámítanunk. $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{1}{5}$, $1 \leq j \leq 10$, ezért $E\xi = 2$. A ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de az előbb tárgyalt tétel segítségével ki tudjuk számolni az összegük szórásnégyzetét. Ehhez vegyük észre, hogy $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^2$, $E\xi_j\xi_k = P(\xi_j = 1, \xi_k = 1) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = \frac{1}{5}\frac{19}{99}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = \frac{1}{5}\left(\frac{19}{99} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{16}{9900}$, ha $j \neq k$. Innen $\operatorname{Var}\xi = 10\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25}\right) - \frac{90 \cdot 16}{9900} = \frac{16}{11}$.

Házi feladat:

Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Visszatevés nélköl kihúzzuk 20 golyót. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?

A következő feladat állítását gyakran hívják teleszkóp szabálynak.

4.)

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1 | B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap B_n) P(B_2 | B_3 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap B_n) \cdots P(B_{n-1} | B_n) P(B_n),$$

ha $P(B_2 \cap \cdots \cap B_n) > 0$.

5.) Egy urnában z zöld és s sárga golyó van. Egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk 2 ellenkező színű golyót. Mi a valószínűsége egy zöld, zöld, zöld, sárga húzássorozatnak?

Megoldás: Kiszámoltuk annak valószínűséségét, hogy az első húzás eredménye Z=(zöld), annak feltételes valószínűségét, hogy a második húzás Z, feltéve, hogy az első húzás Z, annak a feltételes valószínűségét, hogy a harmadik húzás eredménye Z feltéve, hogy elótte Z, Z és annak feltételes valószínűségét, hogy a negyedik húzás eredménye S feltéve, hogy előtte Z, Z, Z húzás volt. Ez a valószínűség, illetve feltételes valószínűségek $\frac{z}{z+s}$, $\frac{z}{z+s+2}$, $\frac{z}{z+s+4}$, $\frac{s+6}{z+s+6}$. A keresett valószínűség $\frac{z}{z+s} \cdot \frac{z}{z+s+2} \cdot \frac{z}{z+s+4} \cdot \frac{s+6}{z+s+6}$.

6. Egy szabályos dobókockát feldobunk, majd feldobunk egy szabályos péndarabot 10-sze annyi alkalommal, mint amennyi a kockadobás eredménye volt. Számítsuk ki a fejdobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Legyen Z_j a fejdobások száma, ha a kockadobás eredménye j volt és nulla különben, $1 \leq j \leq 6$, legyen $Z_{j,k} = 1$, ha a kockadobás eredménye j és a k-ik pénzdobás eredménye fej, $1 \leq j \leq 6$, $1 \leq k \leq 10j$. Ekkor minket a $Z = \sum_{j=1}^{6} Z_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Továbbá, $Z_j = \sum_{k=1}^{10j} Z_{j,k}$. Innen, $EZ = \sum_{j=1}^{6} EZ_j$, $EZ_j = \sum_{k=1}^{10j} EZ_{j,k} = \frac{10j}{12}$. Innen, $EZ = \frac{35}{2}$.

$VarZ = \sum_{j=1}^{6} \operatorname{Var} Z_j + \sum_{\substack{1 \leq j,k \leq 6 \\ j \neq l}} (EZ_j Z_k - EZ_j EZ_k)$. Továbbá, $EZ_j Z_k = 0$, mert

$Z_jZ_k = 0$ egy valószínűséggel, ha $j \neq k$, és $EZ_jEZ_k = \dfrac{100jk}{144}$, ezért $EZ_jZ_k - EZ_jEZ_k = -\dfrac{100jk}{144}$. Ezenkívül

$$\operatorname{Var} Z_j = \sum_{k=1}^{10j} \operatorname{Var} Z_{j,k} + \sum_{\substack{1 \le k,l \le 10j \\ k \neq l}} (EZ_{j,k}Z_{j,l} - EZ_{j,k}EZ_{j,l}),$$

$\operatorname{Var} Z_{j,k} = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{144} = \dfrac{11}{144}$, $EZ_{j,k}Z_{j,l} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{24}$, $EZ_{j,k} = \dfrac{1}{12}$, $EZ_{j,k}Z_{j,l} - EZ_{j,k}EZ_{j,l} = \dfrac{5}{144}$, $\operatorname{Var} Z_j = \dfrac{110}{144}j + \dfrac{50}{144}j(10j-1) = \dfrac{500}{144}j^2 + \dfrac{60}{144}j$. Innen, $\operatorname{Var} Z = \dfrac{10}{144}\left(\sum\limits_{j=1}^{6}(50j^2+6j) - \sum\limits_{\substack{1 \le j,k \le 6 \\ j \neq k}} 10jk\right) = 140$.

7. Az $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$ exponenciális eloszlás teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot: Ha ξ F eloszlású valószínűségi változó, azaz $P(\xi < x) = F(x)$ akkor $P(\xi > x+y|\xi > x) = P(\xi > y$. Miért nevezik ezt a tulajdonságot örökifjú tulajdonságnak?

8. Ha ξ negatív binomiális valószínűségi változó $n = 1$ paraméterrel, azaz $P(\xi = k) = p^k(1-p)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, valamilyen $0 < p < 1$ számmal, akkor ez teljesíti az örökifjú tulajdonság következő diszkrét változatát: $P(\xi \ge k + l|\xi \ge k) = P(\xi \ge l)$. Mi ennek az azonosságnak a valószínűségi magyarázata?

   Valószínűségi magyarázat: Dobjunk fel egy pénzdarabot, mely az egyes dobások során a többi dobástól függetlenül esik p valószínűséggel esik a fej és $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra egymás után egész addig míg meg nem jelenik egy írás dobás. Ekkor $P(\xi \ge l)$ annak a valószínűsége, hogy az első l dobás eredménye fej, a $P(\xi \ge k + l|\xi \ge k)$ pedig annak a feltételes valószínűsége, hogy feltéve, hogy az első k dobás írás, akkor legalább l írás következik a fejdobás megjelenéséig.

9. Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

   Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.