Az október 3-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

1. Lássunk példát arra, hogy például $k = 3$ esetében egy A, B és C halmaz esetében a $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ feltétel teljesülése nem elegendő az A, B és C események függetlenségéhez. Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{2, 3, 4\}$, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(\{5\}) = 1 - \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. Ekkor $ABC = \{2\}$, $P(ABC) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $P(AB) = P(\{2, 3\}) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Ezért $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, de $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

1a.) Lássunk példát három olyan A B és C eseményt, melyek páronként függetlenek, de nem függetlenek.

Egy lehetséges megoldás: Dobjunk le egy pontot az egységnégyzetre egyenletes eloszlással. Legyen $A = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0, 1]$, $B = [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ és $C = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Ekkor $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, és $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$. (Itt egy $X \subset [0, 1] \times [0, 1]$ esemény azt jelenti, hogy a ledobott pont az X halmazba esik.)

Felidézzük a Poisson eloszlás definicióját.

Poisson eloszlás definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy ξ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, ha ξ nem negatív egész értékeket vesz fel, és*

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ahhoz, hogy lássuk, hogy a fenti definició értelmes meg kell mutatnunk, hogy annak valószínűsége, hogy a ξ valószínűségi változó valamilyen nem negatív egész értéket vesz fel eggyel egyenlő. Ezért oldjuk meg az alábbi feladatot:

2. Ha ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1.$$

3. Ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi + \eta$ $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás:

$$P(\xi + \eta = k) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j, \eta = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j) P(\eta = k - j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda^j \mu^{(k-j)}$$
$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda+\mu)^k.$$

4. Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j-ik urnába $p_j \geq 0$ valószínűséggel esik, $j = 1, \ldots, k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Ekkor az η_j, $j = 1, \ldots, k$ valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j = 1, \ldots, k$.

   Megoldás:

$$P(\eta_1 = l_1, \ldots, \eta_k = l_k) = P(\xi = l_1 + \cdots + l_k) \frac{(l_1 + \cdots + l_k)!}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k}$$
$$= \frac{\lambda^{(l_1 + \cdots + l_k)}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda}$$
$$= \frac{\lambda^{l_1} \cdots \lambda^{l_k}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda(p_1 + \cdots + p_k)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!} e^{-\lambda p_j}$$

   tetszőleges $l_1 \geq 0$, ... , $l_k \geq 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

5. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók $P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = 0) = \frac{\lambda}{n}$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Ekkor

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

   Továbbá, $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

   S_n binomiális eloszlású valószínűségi változó n és $p = \frac{\lambda}{n}$ paraméterrel. Továbbá, $\lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k = \frac{\lambda^k}{k!}$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$. Innen következik a feladat állítása.

Diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értékének definiciója. *Legyen ξ (diszkrét eloszlású) valószínűségi változó, amelyik megszámlálható sok $x_1, x_2, \ldots,$ értéket vesz fel. Ekkor a ξ valószínűségi változó várható értéke*

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k).$$

Valószínűségi változó szórásnégyzetének definiciója. *Egy* ξ *valószínűségi változó szórásnégyzete* $\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2$. *Be lehet látni, hogy* $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2$.

6. Számítsuk ki egy λ paraméterű Poisson eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda.$$

$$\begin{aligned}
E\xi^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda^2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda + \lambda^2.
\end{aligned}$$

   Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$.