A szeptember 12-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

1. Mi annak a valószínűsége, hogy lottóhúzás eredményeként legalább négyes találatot érünk el?

   Megoldás: Hány olyan kitöltése van a lottószelvénynek, mely mely (pontosan) 4 találatot biztosít? Az 5 jó számból 4-et 5 féleképpen, a rosszat 85 féleképpen választhatom, ezek mind különböző sorozatok, így $5 \cdot 85$ féleképp lehet pontosan 4 találatom, és 1 féleképpen 5 találatom. Az összes lehetőség $\binom{90}{5}$, és minden sorozat egyforma valószínű. Ezért a keresett valószínűség $\dfrac{5 \cdot 85 + 1}{\binom{90}{5}}$.

   Házi feladat:

   Mi annak a valószínűsége, hogy egy kitötltött lottószelvényen pontosan három találatot érünk el?

2. Egy házibulira 50 embert hívnak meg. Mindenki egymástól függetlenül 0.5 valószínűséggel megy el. Mi annak a valószínűsége, hogy lesznek vendégek a házibulin?

   Megoldás: Mint sok egyéb esetben, most is érdemes az esemény be nem következésének a valószínűségét kiszámolni. Ez $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$. Így annak valószínűsége, hogy valaki eljön $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{50}$.

3. Egy házibulira 50 embert hívnak meg. Mindenki egymástól függetlenül 0.5 valószínűséggel megy el. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 3 ember jön el? Annak, hogy legalább három ember jön el?

   Megoldás: $\binom{50}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$, $1 - \left(1 + \binom{50}{1} + \binom{50}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$.

4. Valaki játékra hív fel. Egy állítólag szabályos pénzdarabot dob fel egymás után 10 000-szer. Fejdobás esetén ő nyer egy forintot írás dobás estén mi. A dobások eredményeként 5500 fejdobás történt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos pénz feldobása esetén a fejdobások száma legalább 5500?

   Megoldás: Ez a valószínűség $\sum_{k=5500}^{10000} \binom{10000}{k} 2^{-10000}$.

   Valójában, ezzel a feladat megoldásával nem vagyunk kész. Arra is kiváncsiak vagyunk, hogy ez a szám körülbelül mekkora. Ki tudjuk-e ezt számolni kevés számolással viszonylag rövid idő alatt? Az igazi, minket érdeklő kérdés az, hogy pechünk volt-e, vagy a játékot javasló személy csalt, a pénzdarab nem volt szabályos. Ehhez a kérdéshez később még visszatérünk.

   Megbeszéltük, hogy az a kérdés, hogy az adott dobássorozat esetén elhisszük-e azt, hogy a pénzdarab szabályos-e a matematikai statisztika egy fontos kérdésének a hipotézésvizsgálatnak speciális esete. Az áltlalános kérdés az, hogy egy elvégzett a véletlentől is függő kisérletsorozat alapján elfogadjuk-e, hogy egy adott feltételezés (hipotézis) helyes-e. Ha a hipotézis érvényes és mi mégis elvetjük azt nevezzük első fajú hibának. Ha a hipotézis nem teljesül és mi mégis igaznak fogadjuk el, azt másodfajú hibának nevezzük. Azt a feladatot szokták vizsgálni, hogy megengedve előirt elsőfajú hibát (ezt általában 0.05 vagy 0.01-nek szokás választani) hogyan tudjuk a másodfajú hibát minimalizálni. Megjegyeztük azt is, hogy a valószínűségszámítás egyik alapvető eredménye a centrális határeloszlástétel segítségével meg lehet határozni egyszerűen az ebben a feladatban tekintett valószínűség jó közelítő értékét. Ennek alapján a fenti esemény bekövetkezése rendkivül valószínűtlen.

5. Egy gyakorlatra véletlenszerűen 24 hallgató jön el. Mi annak a valószínűsége, hogy van közöttük két ember, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?

   Megoldás: Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy nincs ilyen ember. Képzeljük el, hogy egymásután megjelennek a hallgatók, valaki felírja a születésnapjukat, és minden egyes lépésben más dátumot ír fel. Az első hallgató megjelenésekor biztos, hogy új számot ír fel, a második hallgató megjelenésekor $(1-1365)$, a harmadik hallgató megjelenésekor, (feltéve, hogy az első két hallgató esetében különböző számokat írt fel $(1-2365)$, a negyedik hallgató esetében $(1-3365)$ valószínűséggel írt fel különböző számokat, és így tovább. Annak a valószínűsége, hogy mind a 24 esetben különböző számokat írt fel $\prod\limits_{k=1}^{23}\left(1-\frac{k}{365}\right)$, a keresett valószínűség pedig $1-\prod\limits_{k=1}^{23}\left(1-\frac{k}{365}\right)$.

   Kiváncsiak lehetünk, hogy ez a szám mekkora. Nagyon kicsi vagy nagyon nagy, azaz majdnem 1. Meg tudjuk-e ezt határozni viszonylag kevés számolással? A következő számolás tanulságos lehet. A vizsgálandó szorzatot felírhatjuk mint

$$1-\prod_{k=1}^{23}\left(1-\frac{k}{365}\right)=1-\exp\left\{\sum_{k=1}^{23}\log\left(1-\frac{k}{365}\right)\right\}.$$

   Használjuk fel a $\log(1+x)\sim x$ kis x számokra való közelítést. Ez azt sugallja, hogy $\log\left(1-\frac{k}{365}\right)\sim-\frac{k}{365}$, és a vizsgált valószínűség közelítőleg

$$1-\exp\left\{-\sum_{k=1}^{23}\frac{k}{365}\right\}=1-\exp\left\{-\frac{12\cdot 23}{365}\right\}.$$

6. Egy szabályos dobókockát sokszor feldobunk egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a 17. dobásban jelenik meg a 3. hatos?

   Megoldás: Ez azt jelenti, hogy az első 16 dobásban pontosan két hatos jelenik meg, a 17. dobás eredménye pedig szintén hatos. Ennek valószínűsége $\binom{16}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{14}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}$.

Házi feladat:

Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után többször. Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. dobásban jelenik meg az ötödik hárommal osztható szám?

7. Egy szabályos dobókockát sokszor feldobunk egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a 3. hatos dobás a 20. vagy azután következő dobásban jelenik meg?

   Megoldás: Ez azt jelenti, hogy az első 19 dobásban nulla, egy vagy két hatos jelenik meg. Ennek valószínűsége $\left(\frac{4}{6}\right)^{19} + \binom{19}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \cdot \frac{5}{6} + \binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2}$.

   Valójában az az állítás, hogy a vizsgálandó esemény helyett lehet annak a valószínűségét kiszámítani, hogy az első 19 dobásban csak nulla egy vagy két fej dobás jelenik meg némi külön indoklást igényel. A probléma az, hogy előfordulhat az is, hogy a végtelen dobássorozatban nem jelenik meg három hatos dobás. Viszont ennek az eseménynek a valószínűsége nulla. Erre a kérdésre visszatértünk a következő gyakorlaton.

   Másik megoldás: Ez azt jelenti, hogy a harmadik hatos dobás eredménye a 20, 21, 22 vagy valamelyik későbbi dobás eredménye. (Tudni kell, hogy egy valószínűséggel előbb-utóbb megjelenik a harmadik fej-dobás.) Ennek valószínűsége

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{3} \sum_{k=20}^{\infty} \binom{k-1}{2} \left(\frac{1}{16}\right)^{k-2}.$$