A szeptember 19-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

1. Egy szabályos dobókockát sokszor feldobunk egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a 3. hatos dobás a 20. vagy az egyik későbbi dobásban jelenik meg?

   Megoldás: Ez azt jelenti, hogy az első 19 dobásban nulla, egy vagy két hatos jelenik meg. Ennek valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^{19}+\binom{19}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{18}\cdot\frac{1}{6}+\binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}$.

   Másik megoldás: Ez azt jelenti, hogy a harmadik hatos dobás eredménye a 20, 21, 22 vagy valamelyik későbbi dobás eredménye. (Tudni kell, hogy egy valószínűséggel előbb-utóbb megjelenik a harmadik fej-dobás.) Ennek valószínűsége

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\sum_{k=20}^{\infty}\binom{k-1}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^{k-3}.$$

   Annak érdekében, hogy megértsük az első megoldás jogosságát lássuk be, hogy

2. Annak, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni feldobása során nem jelenik meg három hatos nulla a valószínűsége.

   Megoldás: Az állítás ekvivalens azzal, hogy annak valószínűsége, hogy bekövetkezik legaláb három hatos dobás 1. Ez utóbbi esemény valószínűsége viszont nagyobb mint az, hogy (akárhogyan is rögzítünk egy n egész számot) annak valószínűsége, hogy az első n dobás közül legalább egy hatos, az $n+1$-ik és $2n$-ik dobás közötti dobások közül legalább az egyik hatos és a $2n+1$-ik éa $3n$-ik dobás közötti dobások közül legalább az egyik hatos. Ennek valószínűsége viszont $\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right)^{3}$. Ezért a vizsgált valószínűség ennél a számnál nagyobbnak kell lenni tetszőleges n-re, ami csak úgy lehetséges, hogy ez a valószínűség 1.

Röviden beszéltünk arról, hogy hogyan lehet megmutatni azt, hogy az első feladat két megoldásában a látszólag teljesen különböző megoldás megegyezik. Megjegyeztük, hogy a második összegben szereplő végtelen összeg összegezhető a $(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}$, ha $|x|<1$ aonosság segítségével, ahol $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. (A fenti azonosság minden valós α számra érvényes, tekinthető úgy mint az általánosított binomiális tétel, és az $(1+x)^{\alpha}$ függvény Taylor sorfejtéséből következik.) Azt kell észrevenni, hogy

$$\binom{k-1}{2}=\frac{(2-k)(1-k)}{2}=(-1)^{k-1}\frac{(-3)(-4)\cdots(1-k)}{(k-3)!}=(-1)^{k-1}\binom{-3}{k-3},$$

ahonnan $\sum_{k=3}^{\infty}\binom{k-1}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^{k-3}=\sum_{k=3}^{\infty}\binom{-3}{k-3}\left(-\frac{5}{16}\right)^{k-3}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}\left(-\frac{5}{16}\right)^{k}=\left(1-\frac{5}{6}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$.

3. Egy tóban 3000 hal van. Véletlenül kihalásnak belőle 1000 darabot, és ezekre piros pöttyöt festenek és visszaengedik őket. Ezután ismét kifognak véletlenül 1000 halat. Mi annak a valószínűsége, hogy a kifogott halak között 100 megfestett van?

   Megoldás: $\dfrac{\binom{1000}{100}\binom{2000}{900}}{\binom{3000}{1000}}$.

   Megjegyzés: A gyakorlatban előforduló kérdés ennek fordítottja. Elvégezzük a fenti kisérletet, összeszámláljuk a megfestett halakat, és ebből próbálunk következtetni a tóban levő halak számára. Hogyan érdemes ezt csinálni? Ez a későbbiek témája lesz.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n, m és k számokra, melyekre $k \le n$, $m \le n$

$$\sum_{r=1}^{k} \binom{m}{r}\binom{n-m}{k-r} = \binom{n}{k}.$$

   Megoldás: Számítsuk ki két különböző módon azt, hogy az $1, 2, \dots, n$ számok közül hányféleképp tudok kiválasztani k számot. Az egyik kiszámítás legyen az, hogy azt nézem, hogy az $1, \dots, m$ számok közül hánféleképp tudok kiválasztani r-et az $m+1, \dots, n$ számok közük $k-r$-et, és azután tekintjük az összes $1 \le r \le k$ lehetőséget.

A harmadik feladat kapcsán felmerül a következő kérdés. Valójában, nem tudjuk, hogy hány hal van a tóban. De végezhetünk két fogást, az első fogásban kifogott halakat megjelöljuk, és meg akarjuk állapítani mennyi hal lehet összesen a tóban. Ezt természetesen csak bizonyos (véletlentől függő) pontossággal tudjuk meghatározni. Az ilyen tipusú feladatok tipikusak a matematikai statisztikában, az ilyen problémák vizsgáalatát nevezik becsléseleméletnek. Világos, hogy az, hogy 1000-nél alig több hal van, nem túl valószínű, mert akkor sokkal több megjelölt hal lenne a második fogásban. Az hogy rengeteg, mondjuk 1 000 000 hal lenne a tóban szintén nem túl valószínű, mert akkor sokkal kevesebb megjelölt hal lenne a második fogásban. A matematikai statisztikában kidolgoztak egy általános elvet a maximum likelihood módszernek nevezett eljárást, mely nagyon általános feltételek mellett nagyon jó módszert ad, és mely jelen esetben is alkalmazható. Tárgyaljuk meg ezt a módszert a jelen esetben. Tekintsünk kissé általánosabb esetet. Vezessük be a következő jelöléseket:

n a tóban lévő halak (ismeretlen) száma,

n_1 az első fogásban kifogott (és megjelölt) halak száma,

r a második fogásban kifogott halak száma,

k a második fogásban kifogott előzöleg megjelölt halak száma. Annak valószínűsége, hogy adott (ismeretlen) n és n_1, r számok esetén pontosan k megjelölt halat fogunk ki

$$q_k(n, n_1, r) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}}.$$

Tekintsük az ismeretlen n szám (maximum likelihood) becslésének azt az n számot, melyre a $q_k(n, n_1, r)$ mennyiség (rögzített n_1, k és r számok mellett maximális.

5. Határozzuk meg a fenti feladatban a maximum likelihood becslést.

   Megoldás: Námi számolás mutatja, hogy

$$\frac{q_k(n, n_1, r)}{q_k(n-1, n_1, r)} = \frac{n - n_1}{n - n_1 - r + k} \cdot \frac{n - r}{n} = \frac{n^2 - rn - n_1 n + rn_1}{n^2 - rn - n_1 n + kn}.$$

   Ez a tört kisebb mint egy, ha $rn_1 < kn$, nagyobb mint egy, ha $rn_1 > kn$. Ezért a becslés $rn_1 = kn$, azaz $n = \frac{rn_1}{k}$, pontosabban az e számot közrefogó egész számok valamelyike.

6. Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik hatos?

Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}$. Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{1}{11}$.

Házi feladat:

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk háromszor egymás után. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a három dobás fej, feltéve, hogy legalább két fejdobás történt?