A szeptember 26-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

1. Egy diák a feltett kérdésre (három lehetőség közül kell kiválasztani a megfelelőt) p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel, és ez $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ad helyes eredményt. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy tudja a választ feltéve, hogy helyes választ adott?

Jelölje A azt az eseményt, hogy tudja a helyes választ, B azt az eseményt, hogy helyes választ ad. A $P(A|B)$ feltételes valószínűség értékére vagyunk kiváncsiak. Ekkor $P(A) = P(A \cap B) = p$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) + \frac{1}{3}P(\bar{A}) = p + \frac{1}{3}(1-p)$. Innen $P(A|B) = \dfrac{p}{p + \frac{1}{3}(1-p)}$.

2. Egy ξ valószínűségi változó eloszlása (n, p) paraméterű negatív binomiális eloszlás, ha pozitív egész értékeket vesz fel, és $P(\xi = k) = \binom{k-1}{n-1} p^{k-n}(1-p)^n$. Tekintsünk egy pénzdarabot, mely p valószínűséggel esik a fej oldalra és $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra. Dobjuk fel egymás után végtelen sokszor, és tekintsük azt a ξ valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy hányadik dobásra jelent meg az n-ik írás. Lássuk be, hogy ξ eloszlása negatív binomiális eloszlás (n, p) paraméterrel.

3.) A zsebünkben van 30 kulcs, melyek közül az egyik nyit egy zárat. Egymás után kiprobáljuk véletlenszerűen kipróbálva ezeket a kulcsokat. Mi a valószínűsége annak, hogy a 20. kisérletre sikerül kinyitni a zárat? Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. kisérletben sikerül kinyitni a zárat feltéve, hogy az első 19 kisérletben ez nem sikerült?

Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy pont a j-ik húzásra síkerül kihúzni a jó kulcsot, $B_j = A_1 \cup \cdots \cup A_j$ azt az eseményt, hogy az első j kihúzott kulcs egyike a jó kulcs. Ezeknek az eseményeknek a valószínűsége, $P(A_j) = \frac{1}{30}$ és $P(B_j) = \frac{j}{30}$. Annak valószínűsége, hogy a 20. húzásban húzzuk ki a jó kulcsot $F(A_{20}) = \frac{1}{30}$. Annak feltételes valószínűsége, hogy a 20. húzásban húzzuk ki a jó kulcsot feltéve, hogy az első 19 dobásban nem síkerült azt kihúzni, $P(A_{20}|\bar{B}_{19}) = \dfrac{P(A_{20} \cap \bar{B}_{19})}{P(\bar{B}_{19})} = \dfrac{F(A_{20})}{1 - P(B_{19})} = \dfrac{\frac{1}{30}}{1 - \frac{19}{30}} = \dfrac{1}{11}$. (A fenti számolásban $\bar{A}$ jelöli egy A halmaz komplementerét.)

4.) Feldobunk egy dobókockát, majd utána annyi dobókockát, amennyi az első dobás eredménye volt. Mi a valószínűsége annak, hogy a második dobássorozatban lesz hatos? Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy az első dobás eredménye hatos, ha a második dobássorozatban nem volt hatos?

Megoldás: Tekintsünk azokat az eseményeket, melyek leírják a lehetséges dobássorozatok eredményét, és adjuk meg ezek valószínűségét. Annak valószínűsége, hogy az első dobás eredménye i, majd ezt követően egy i hosszúságú 1 és 6 közötti számokat tartalmazó dobássorozatot kapunk $\left(\frac{1}{6}\right)^{i+1}$. Annak valószínűsége, hogy az első dobás eredménye i, és az utolsó i dobás egyike sem hatos, $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{i}$. Annak valószínűsége, hogy a második dobássorozatban van hatos

$$\frac{1}{6}\left(\left(1-\frac{5}{6}\right)+\cdots+\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\right)\right).$$

Annak valószínűsége, hogy az első dobás hatos, utána pedig van hatos dobás $\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\right)$. Ezért a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}}{\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)\right)+\cdots+\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\right)}.$$

5.) Három gép gyárt csavarokat, az egyik 0.01 a második 0.02 a harmadik 0.03 valószínűséggel gyárt hibás csavarokat. A csavarokat egy raktárba viszik összekeverik. Egy gyártott csavar 0.5 valószínűséggel készült az első 0.3 valószínűséggel a második és 0.2 valószínűséggel készült a harmadik gépen. Kiveszünk egy csavart, megnézzük, és azt találjuk, hogy hibás. Milyen valószínűséggel készült a csavar eme feltételek mellett az első gépen?

Megoldás: Jlölje A_1, A_2 illetve A_3 azt az eseményt, hogy a csavar az első, második vagy harmadik gépen készült, B azt az eseményt, hogy a csavar hibás. Ekkor minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$, továbbá $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_2) = 0.02$, és $PB(B|A_3) = 0.03$. Ekkor

$$\begin{aligned} P(B|A_1) = \frac{P(B\cap A_1)}{P(A_1)} &= \frac{P(A_1|B)P(A_1)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)} \\ &= \frac{P(A_1|B)P(A_1)}{P(A_1|B)P(A_1)+P(A_2|B)P(A_2)+P(A_3|B)P(A_3)} \\ &= \frac{0.01\cdot 0.5}{0.01\cdot 0.5+0.02\cdot 0.3+0.03\cdot 0.2}. \end{aligned}$$

Események függetlenségének definiciója: *Az $A_1,\ldots,A_n$ események akkor (teljesen) függetlenek, ha az $\{1,\ldots,n\}$ indexhalmaz minden $\{j_1,\ldots,j_k\}\subset\{1,\ldots,n\}$ részhalmazára*

$$P(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}) = P(A_{j_1})\cdots P(A_{j_k}).$$

Események végtelen $A_1, A_2, \ldots$ sorozata akkor és csak akkor független, ha tetszőleges pozitív n egész számra az $A_1, \ldots, A_n$ események függetlenek.

Események függetlenségének definiciója: *Az $A_1, \ldots, A_n$ események akkor páronként függetlenek, ha minden $1 \le i < j \le n$ számra $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.*

6. Lássunk példát arra, hogy például $k = 3$ esetében egy A, B és C halmaz esetében a $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ feltétel teljesülése nem elegendő az A, B és C események függetlenségéhez. Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{2, 3, 4\}$, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(\{5\}) = 1 - \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. Ekkor $ABC = \{2\}$, $P(ABC) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $P(AB) = P(\{2, 3\}) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Ezért $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, de $P(AB) \ne P(A)P(B)$.

7.) Lássunk példát három olyan A B és C eseményt, melyek páronként függetlenek, de nem függetlenek.

   Egy lehetséges megoldás: Dobjunk le egy pontot az egységnégyzetre egyenletes eloszlással. Legyen $A = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0, 1]$, $B = [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ és $C = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Ekkor $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, és $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$. (Itt egy $X \subset [0, 1] \times [0, 1]$ esemény azt jelenti, hogy a ledobott pont az X halmazba esik.)

A következő feladat állítását gyakran hívják teleszkóp szabálynak.

8.)

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1 | B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap B_n) P(B_2 | B_3 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap B_n) \\ \cdots P(B_{n-1} | B_n) P(B_n),$$

   ha $P(B_2 \cap \cdots \cap B_n) > 0$.

9.) Egy urnában z zöld és s sárga golyó van. Egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk 2 ellenkező színű golyót. Mi a valószínűsége egy zöld, zöld, zöld, sárga húzássorozatnak?

   Megoldás: Kiszámoltuk annak valószínűséségét, hogy az első húzás eredménye Z=(zöld), annak feltételes valószínűségét, hogy a második húzás Z, feltéve, hogy az első húzás Z, annak a feltételes valószínűségét, hogy a harmadik húzás eredménye Z feltéve, hogy elötte Z, Z és annak feltételes valószínűségét, hogy a negyedik húzás eredménye S feltéve, hogy előtte Z, Z, Z húzás volt. Ez a valószínűség, illetve feltételes valószínűségek $\dfrac{z}{z+s}$, $\dfrac{z}{z+s+2}$, $\dfrac{z}{z+s+4}$, $\dfrac{s+6}{z+s+6}$. A keresett valószínűség $\dfrac{z}{z+s} \cdot \dfrac{z}{z+s+2} \cdot \dfrac{z}{z+s+4} \cdot \dfrac{s+6}{z+s+6}$.

10. Két különböző fáról leszednek 10 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen dobozba.) Ez egyik fáról szedett almák $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik dobozból két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik dobozból egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első almafáról leszedett almákat tartalmazó ládát és A_2 azt az eseményt, hogy az második almafáról leszedett almákat tartalmazó ládát választottuk az első kisérletre. Jelölje B azt az eseményt, hogy e ládából kiválasztott két alma férges. Számítsuk ki a $P(A_1|B)$ és $P(A_2|B)$ feltételes valószínűségeket.

Mivel $P(A_1|B) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$, $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$, $P(A_1 \cap B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{16}$, $P(A_2 \cap B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{100}$, ezért $P(A_1|B) = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}$. Hasonlóan, $P(A_2|B) = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}$. Jelölje C azt az eseményt, hogy a másik ládából veletlenül kiválasztott alma nem férges. Ekkor minket a $P(C|B)$ feltételes valószínűség érdekel.

Viszont $P(C|A_1 \cap B) = P(C|A_1) = \dfrac{9}{10}$, $P(C|A_2 \cap B) = P(C|A_2) = \dfrac{3}{4}$, $P(C|B) = P(C \cap A_1|B) + P(C \cap A_2|B) = P(C|A_1 \cap B)P(A_1|B) + P(C|A_2 \cap B)P(A_2|B)$. Ezért $P(B|C) = \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}} + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}$.

11. Egy urnában 20 piros és 80 fehér golyó van. Visszatevés nélköl kihúzzuk a golyókat. Mi annak a valószínűsége, hogy az első golyó piros? Annak, hogy az ötödik kihúzott golyó piros? Annak, hogy az első és második kihúzott golyó piros? Annak, hogy a második és ötödik kihúzott golyó piros?