A szeptember 5-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

1. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk kétszer egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás dobás lesz?

   Házi feladat:

   Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások összege 9? Annak, hogy a dobások összege 10?

2. Kitöltünk egy lottószelvényt. Mi annak a valószínűsége, hogy 5-ös találatot érünk el?

   Megoldás: Gondoljuk, meg, hány különböző eredménye lehet a húzásoknak. Az első számot 90 féleképpen hízhatjuk, a másodikat 89 féleképp, a harmadikat 88 a negyediket 87 az ötödiket 86 féleképpen. Felírva egymás után ezeket a számokat összesen $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$ különböző sorozat lehetséges. Ugyanakkor két húzássorozatot nem különböztetünk meg, ha ugyanazok a számok jelennek meg bennük csak más sorrendben. Írjuk fel egy húzassorozat számait növekvő sorrendben. Hány különböző módon jelenhet meg ugyanaz a növekvő számsorozat? A legnagyobb szám 5 helyen, a második legnagyobb szám ezután 4, a harmadik legnagyobb szám ezután 3, a negyedik legnagyobb szám ezután két különböző helyen szerepelhet, a legkisebb szám helye pedig végül egyértelmű. Így összesen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ különböző módon jelenhet meg ugyanaz az eredmény. Összesen tehát $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{120}$ különböző húzássorozat lehetséges. Mivel minden húzássorozat egyforma valószínű, annak valószínűsége, hogy egy adott (nagyság szerint rendezett számsorozat) jelenik meg $\frac{120}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$.

3. Egy n elemű halmaznak $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$ különböző részhalmaza van, $k \le n$.

   Megoldás: Feltehetjük, hogy a tekintett halmaz az $1, 2, \ldots, n$ számokból áll. Ebből $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ különböző módon választhatunk ki egymás után k számot. Viszont mivel két választás, melyben ugyanazokat a számokat választottuk ki egymás után más sorrendben ugyanazt a halmazt adja, ezért minden halmazt $1 \cdot 2 \cdots k$ féle módon választottunk. Innen adódik az eredmény.

4. Az $1, 2, \ldots, n$ számokat $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ módon lehet sorrendbe rakni.

5. Binomiális tétel:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

   ahol $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$.

Magyarázat: Végezzük el az $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ tényező}}$ szorzásokat. Ez olyan n hosszúságú szorzatokból álló összeg lesz, mely a és b számokból fog állni. Hány olyan tag szerepel, mely k a és $n-k$ b jegyet tartalmaz? A fenti kombinatorikai meggondolások alapján látható, hogy $\binom{n}{k}$.

Tárgyaltuk a binomiális tétel egy általánosítását is. Ennek érdekében bevezettük a következő definiciót: Ha k pozitív egész szám, n pedig *tetszőleges valós szám* akkor $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$. Fontos, hogy ez a definició nemcsak egész n számokra van definiálva. Ki akarjuk számolni az $(1+x)^n$ függvény Taylor sorát tetszőleges (valós) n számra.

Házi feladat:

Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = (1+x)^n$ függvény Taylor sora az

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

hatványsor tetszőleges valós n szám esetén.

Be lehet látni, hogy $|x| < 1$ esetén az $(1+x)^n$ függvény egyenlő a hatványsorával. Megjegyeztük, hogy abban az esetben, ha n pozitív egész szám, $k > n$, akkor $\binom{n}{k} = 0$. Ezért, ha n pozitív egész szám, akkor az $(1+x)^n$ függvény Taylor sora véges sok tagból áll, és ez az összeg megegyezik azzal az összeggel, melyet a binomiális tétel sugall.

6. Egy urnában golyók vannak, melyek tartalmazzák az $1, \dots, n$ számokat. Kihúzunk egymás után k golyót. Hány különböző húzáseredmény lehetséges. Ha különbséget teszünk két húzássorozat között, melyekben ugyanazokat a számokat húztuk ki, de más sorrendben, akkor $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ lehetőség van, ha nem teszünk különbséget, akkor $\frac{n}{k}$. Ha visszatevéssel húzunk és különbséget teszünk különböző sorrendben kihúzott ugyanazokat a számokat (ugyanolyan multiplicitással) tartalmazó húzássorozatok között, akkor a lehetséges húzások száma n^k.

   Az az eset, amikor visszatevéssel húzunk, de nem számít a különböző kihúzott számok sorrendje nehezebb, de egy ravasz észervétel segítségével megoldható. Ez a következő feladat tárgya.

7. Egy urnában golyók vannak, melyek tartalmazzák az $1, \dots, n$ számokat. Kihúzunk egymás után visszatevéssel k golyót. A kihúzott golyókat nagyság szerint sorba rakjuk. Hány különböző húzáseredmény lehetséges?

   Válasz: $\binom{n-k+1}{k}$. Ugyanis tekintsünk egy kapott húzássorozatot. Az első számhoz adjunk 0-t a másodikhoz 1-et, a harmadikhoz 2-t, … a k-ikhoz $k-1$-et.

Ilyen módon egy szigorúan növekvő k hosszúságú sorozatot kapok melyek elemei az $1, 2, \ldots, n+k-1$ számok valamelyikét veszik fel. Sőt ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adunk a lehetséges kihúzott sorozatok és az $1, 2, \ldots, n+k-1$ halmaz k elemű részhalmazai között. Innen következik, hogy az adott tipusú sorozatok száma $\binom{n+k-1}{k}$.

8. Mi annak a valószínűsége, hogy lottóhúzás eredményeként legalább négyes találatot érünk el?

   Megoldás: Hány olyan kitöltése van a lottószelvénynek, mely mely (pontosan) 4 találatot biztosít? Az 5 jó számból 4-et 5 féleképpen, a rosszat 85 féleképpen választhatom, ezek mind különböző sorozatok, így $5 \cdot 85$ féleképp lehet pontosan 4 találatom, és 1 féleképpen 5 találatom. Az összes lehetőség $\binom{90}{5}$, és minden sorozat egyforma valószínű. Ezért a keresett valószínűség $\frac{5 \cdot 85 + 1}{\binom{90}{5}}$.