

## Kitűzött feladatok

1. Adjuk meg egy szabályos dobókocka 10 egymás utáni dobásának egy lehetséges valószínűségi modelljét. (Kitűzve február 15-én.)
2. Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább három dobást végzünk, és az utolsót kettővel megelőző dobás eredménye fej? (Kitűzve február 15-én.)
3. Egy urnában 50 piros és 50 fehér golyó van. Kihúzzuk a golyókat visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége annak, hogy a 40-ik húzás eredménye piros? Mi annak a valószínűsége, hogy a 60-ik húzás eredménye piros? Mi annak a valószínűsége, hogy a 40-ik húzás eredménye piros? Mi a valószínűsége annak, hogy a 40-ik és 60-ik húzás eredménye is piros? (Kitűzve február 22-én.)
4. Egy urnában 20 fehér és 30 piros golyó van. Ha kihúzzunk egy golyót akkor azt visszadobjuk, és vele együtt bedobunk az urnába két ugyanolyan színű golyót. Ezt megismételjük 50-szer. Mi a valószínűsége annak, hogy a 30. és 50-ik húzás eredménye egyaránt piros. (Kitűzve február 29-én.)
5. Egy szabályos dobókockát egymásután többször feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a 10-ik dobásban dobunk harmadszor hatost. (Kitűzve február 29-én.)
6. Két különböző fáról leszednek 10 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen dobozba.) Ez egyik fáról szedett almák  $\frac{1}{4}$  a másik fáról szedett almák pedig  $\frac{1}{10}$  valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik dobozból két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik dobozból egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges? (Kitűzve február 29-én.)
- 7.\* Legyenek  $A_1, \dots, A_n$  események valamely  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn,  $S_k = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k})$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Ekkor
$$S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{2k-1} S_{2k} \geq P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{2k} S_{2k+1},$$
ha  $2 \leq 2k \leq n$ . (Kitűzve március 7-én.)
8. Egy dobókockát feldobunk tízszer. Számítsuk ki a páratlan dobáseredmények összegének a várható értékét. (A páros dobáseredményeket nem vesszük figyelembe). (Kitűzve március 14-én.)
9. Egy urnában 20 piros és 10 fehér golyó van. Kihúzzunk egymás után 10 golyót úgy, hogy minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy vele azonos színű golyóval együtt. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete? (A megoldás során emlékezzünk arra, hogy megtárgyaltuk annak valószínűségét, hogy egy ilyen modellben mi a valószínűsége, hogy egy adott

---

A \* jelzésű feladatok nem kötelezőek.

sorszámú húzásban kihúzott golyó piros színű illetve annak a valószínűségét, hogy két adott sorszámú húzásban piros golyót húzunk. Láttuk, hogy ezek a valószínűségek nem függnak a húzások sorszámától. Használjuk fel ezeket az eredményeket a megoldásban.) (Kitűzve március 21-én.)

10. Egy  $\xi$  valószínűségi változót  $(n, p)$  paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változónak nevezünk,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $0 < p < 1$ , ha  $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Legyen  $\xi$  és  $\eta$  két független binomiális eloszlású valószínűségi változó  $(m, p)$  illetve  $(n, p)$  paraméterekkel. Ekkor  $\xi + \eta$  binomiális eloszlású valószínűségi változó  $(m + n, p)$  paraméterekkel. (Kitűzve március 21-én.)
11. Fejezzük ki annak valószínűségét, hogy egy  $F(x)$  eloszlású valószínűségi változó egész értéket vesz fel az  $F(x)$  eloszlásfüggvény segítségével. (Kitűzve április 11-én.)
12. Egy szabályos kockát feldobunk, és tekintjük a dobás eredményét megadó valószínűségi változót. Adjuk meg ezt a valószínűségi változót. (Kitűzve április 25-én.)
13. Számítsuk ki egy a  $[0, 1]$  intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. (Kitűzve április 25-én.)
14. Legyen  $\xi$  és  $\eta$  két független és a  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen  $f(x)$  sűrűségfüggvényük  $f(x) = 1$ , ha  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $f(x) = 0$ , ha  $x > \frac{1}{2}$  vagy  $x < -\frac{1}{2}$ . Számítsuk ki  $\xi_1 + \xi_2$  sűrűségfüggvényét. (Kitűzve április 25-én.)
15. Legyen  $\xi$  egyenletes eloszlású valószínűségi változó a  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  intervallumban. Számítsuk ki a  $\xi^2$  és  $\xi^3$  valószínűségi változók eloszlás és sűrűségfüggvényét. (Kitűzve április 25-én.)
16. Egy szabályos dobókockát feldobunk 2700 alkalommal egymástól függetlenül, és összeszámoljuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 420 és 720 közé esik. (Kitűzve május 2-án.)