A november 14-i szeminárium témája
Rövid összefoglaló

Egy valószínűségű, sztochasztikus és eloszlásban való konvergencia, és e két fogalom közötti kapcsolat.

Az előbb felsorolt konvergenciafogalmak a legfontosabbak a valószínűségszámításban. Ezért idézzük fel e fogalmak definicióit, és beszéljük meg azok kapcsolatát, legfontosabb tulajdondságait. Megjegyezzük, hogy az egy valószínűségű konvergenciát majdnem mindenütt való a sztochasztikus konvergenciát pedig mértékben való konvergenciának is hívják.

Az egy valószínűségű konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots,$ sorozata akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt)*

$$P\left(\omega\colon \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1.$$

A sztochasztikus konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots,$ sorozata akkor konvergál sztochasztikusan egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt) minden $\varepsilon > 0$ számra*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right) = 0.$$

Az eloszlásban való konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots,$ sorozata akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez vagy az ezen eloszlásfüggvény által meghatározott eloszláshoz, ha $\lim\limits_{n\to\infty} P(\xi_n < u) = F(u)$* minden olyan u számra, ahol az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény függvény folytonos. *(Azt mondjuk, hogy a ξ_n, $n = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál egy ξ valószínűségi változóhoz, ha ez a sorozat eloszlásban konvergál az $F(u) = P(\xi < u)$ eloszlásfüggvényhez.)*

Eloszlásfüggvények $F_n(u)$ sorozata akkor és csak akkor konvergál egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha valószínűségi változók olyan ξ_n, $n = 1, 2, \dots,$ sorozata, melyekre ξ_n eloszlása $F_n(u)$ eloszlásban konvergálnak az $F(u)$ eloszlásfüggvényhez. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(u) = F(u)$ az $F(\cdot)$ függvény minden folytonossági pontjában.

A továbbiakban tárgyalni fogjuk

a.) A különböző konvegenciafogalmak közötti kapcsolatot.

b.) Az eloszlásban való konvergencia pontosabb tartalmát. Külön tárgyaljuk azt, hogy miért csak az $F(\cdot)$ határeloszlás folytonossági pontjaiban követeljük meg a $P(\xi_n < u) \to F(u)$ konvergenciát.

Igaz a következő kapcsolat: Egy valószínűségi konvergencia $\Rightarrow$ Sztochasztikus konvergencia $\Rightarrow$ Eloszlásban való konvergencia.

A sztochasztikus és eloszlásban való konvergencia kapcsolatát tárgyaltuk az október 10-i gyakorlaton. Most tárgyaljuk az egy valószínűségi és sztochasztikus konvergencia kapcsolatát.

Ha $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ egy valószínűséggel, akkor definiálva az

$$A_n = A_n(\varepsilon) = \left\{ \omega\colon \sup_{k\ge n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon \right\}$$

halmazokat kapjuk, hogy az egymásba skatulyázott A_n halmazokra, (azaz $A_1(\omega) \subset A_2 \subset \cdots$), $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$. Ezért $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 1$. Mivel $\{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} \supset A_n$, $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon) \to 1$, azaz $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \ge \varepsilon) \to 0$, ha $n \to \infty$. Ez azt jelenti, hogy az egy valószínűségű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

Nem kötelező házifeladat:

Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata, akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $\eta_n = \sup\limits_{k\ge n} |\xi_k - \xi|$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0$.

Lássunk példát arra, hogy lehetséges olyan ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, és ξ valószínűségi változókat konstruálni, melyekre a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan tart ξ-hez, de a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Tekintsük a következő $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt: Ω a $[0, 1]$ intervallum, $\mathcal{A}$ a Borel mérhető halmazok σ-algebrája a $[0, 1]$ intervallumon, a P valószínűségi mérték a Lebesgue mérték. Legyen

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left[(n-2^k)2^{-k}, (n+1-2^k)2^{-k}\right] \\ 0 & \text{ha } x \notin \left[(n-2^k)2^{-k}, (n+1-2^k)2^{-k}\right] \end{cases}$$
$$\text{akkor ha } 2^k \le n < 2^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

és $\xi(x) = 0$ minden $0 \le x \le 1$ számra. Ekkor $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 2^{-k}$ minden $\varepsilon > 0$ számra, ha $2^k \le n < 2^{k+1}$. Tehát a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan konvergál a ξ valószínűségi változóhoz. Viszont mivel $\limsup\limits_{n\to\infty} \xi_n(x) = 0$ minden $0 \le x \le 1$ számra, ezért a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Másrészt a Borel-Cantelli lemmából következik, hogy amennyiben minden $\varepsilon > 0$ számra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$, akkor a ξ_n sorozat egy valószzínűséggel konvergál a ξ valószínűségi változóhoz. Miért?

Ez a megjegyzés azt mutatja, hogy ha a $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$ valószínűség minden rögzített $\varepsilon > 0$ számra olyan kicsi, hogy nemcsak nullához tart, hanem az ezekből a valószínűségekből, $n = 1, 2, \dots$, készített összeg konvergens, akkor a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók egy valószínűséggel konvergálnak a ξ valószínűségi változóhoz. Viszont lehetséges, hogy valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata egy valószínűséggel tart nullához, noha a $P(|\xi_n| > \frac{1}{2})$ valószínűségek lassan tartanak nullához. Példa: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, ahol $\mathcal{A}$, a Borel mérhető halmazok σ-algebrája a $[0,1]$ intervallumon, és λ a Lebesgue mérték. Definiáljuk a $\xi_n(x)$ valószínűségi változókat a következőképpen: $\xi_n(x) = 1$, ha $0 \le x \le \frac{1}{n}$, és $\xi_n(x) = 0$, ha $\frac{1}{n} < x \le 1$. Ekkor $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n(x) = 1$ minden $0 < x \le 1$ esetében. Viszont $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(\xi_n > \frac{1}{2}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Sőt a fenti példát tudjuk élesíteni. Hasonló példát kapunk, ha a ξ_n valószínűségi változót úgy definiáljuk, mint a $[0, \varepsilon_n]$ intervallum indikátorfüggvényét, ahol ε_n, $n = 1, 2, \dots$, tetszőleges nullához tartó sorozat.

A fenti példa mutatja, hogy a Borel–Cantelli lemmában a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ feltétel nem elegendő ahhoz, hogy egy valószínűséggel végtelen sok A_n esemény következzék be. Az ok a tekintett példában az, hogy a különböző A_n események majdnem ugyanazt a halmazt fedik le, így lehetnek olyan $\omega \in \Omega$ elemi események, melyekre azon n indexek, melyekre $\omega \in A_n$ sűrűen vannak, míg más $\omega \in \Omega$ elemi eseményeket ritkán fednek le az A_n események. Megjegyzem, hogy az A_n események függetlensége a Borel–Cantelli lemmában arra szolgál, hogy érvényes legyen egyfajta nagy számok törvénye, az A_n halmazok egyenletesen fedjék le az Ω halmazt.

Láttuk, hogy lehetséges az, hogy valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak, de egy valószínűséggel nem. Felmerülhet a kérdés, lehetséges-e az, hogy független egyforma eloszlású valószínűségi változok részletösszegei teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, de nem teljesítik a nagy számok erős törvényét. A válasz igen, de ennek bizonyítása jóval nehezebb, mint az eddig tárgyalt állításoké. Az általános elméletben meg tudják adni mind a nagy számok gyenge mind a nagy számok erős törvényének szükséges és elégséges feltételét, és ezek összehasonlítása segít a feladat megoldásában. Bár bizonyos fontos részletek bizonyítását nem kötelező házifeladatnak fogunk tekinteni, meg fogunk adni egy példát arra, mely olyan példát mutat, amelyikben a nagy számok gyenge törvényét teljesíti, de a nagy számok gyenge törvényét nem. Először idézzük fel a következő eredményt.

Tétel. *Jelölje egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F(u)$, sűrűségfüggvényét pedig (amennyiben ez létezik) $f(u)$. Legyen $g(u)$ mérhető függvény a számegyenesen, melyre $g(\xi)$ integrálható, azaz $E|g(\xi)| < \infty$. Ekkor*

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, dF(u) \qquad \left(= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(u)\, du \right).$$

Továbbá az $E|g(\xi)| < \infty$ állítás akkor és csak akkor érvényes, ha $\int |g(u)|\, dF(u) < \infty$. A zárójelben megfogalmazott reláció akkor érvényes, ha a ξ valószínűségi változó elosz-

lásának létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye. Speciálisan,

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u\,dF(u) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)\,du.$$

Lássuk be ennek az eredménynek a segítségével azt, hogy $E|\xi| < \infty$ akkor és csak akkor, ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(|\xi| > n) < \infty$.

$E|\xi| < \infty$ akkor és csak akkor, ha $\int |u|\,dF(u) < \infty$, és ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nP(n < |\xi| \le n+1) < \infty$. (Miért?) Ezt az összeget átrendezve

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} nP(n < |\xi| \le n+1)) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\left(P(|\xi| > n) - P(|\xi| > n+1)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi| > n)[n-(n-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi| > n)\end{aligned}$$

Innen következik az állítás.

Házi feladat. (Nem kötelező)

A ξ valószínűségi változónak akkor és csak akkor létezik véges második momentuma, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nP(|\xi| > n) < \infty$. Általánosabban $E|\xi|^k < \infty$ valamilyen $k = 1, 2, \dots,$ számra akkor és csak akkor, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{k-1}P(|\xi| > n) < \infty$.

Belátjuk az előző eredmény és a Borel–Cantelli lemma segítségével, hogy ha a $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata olyan, hogy $E|\xi_1| = \infty$, akkor az $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$ sorozat egy valószínűséggel divergens, ahol $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Tehát ebben az esetben nem teljesül a nagy számok erős törvénye.

Vegyük észre, hogy amennyiben $E|\xi_1| = \infty$, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(|\xi_1| > n) = \infty$, az $\{\omega\colon |\xi_n(\omega)| > n\}$ események függetlenek, ezért a Borel-Cantelli lemma szerint majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén $|\xi_n(\omega)| > n$ végtelen sok n indexre.

Ha $\omega \in \Omega$ olyan pont, melyben az $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots,$ sorozat konvergens, akkor ebben az ω pontban $\sup\limits_{1\le n<\infty} \left|\dfrac{S_n(\omega)}{n}\right| < K(\omega)$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{S_{n+1}(\omega)}{n+1} - \dfrac{S_n(\omega)}{n}\right) = 0$. Viszont, $\dfrac{S_{n+1}(\omega)}{n+1} - \dfrac{S_n(\omega)}{n} = \dfrac{\xi_{n+1}(\omega)}{n+1} + \dfrac{S_n(\omega)}{n(n+1)}$, és $\dfrac{S_n(\omega)}{n(n+1)} \to 0$. Innen következik, hogy $|\xi_{n+1}(\omega)| < n+1$ minden $n \ge n_0(\omega)$ számra alkalmas $n_0(\omega)$ küszöbindex-szel, ha az $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$ sorozat konvergál. Ez viszont csak nulla valószínűségű $\omega \in \Omega$ halmazra érvényes.

Megjegyezzük bizonyítás nélkül, hogy érvényes ennek az állításnak a megfordítása is, nevezetesen a következő tétel.

Tétel. *Legyen ξ_1, ξ_2, ... , független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Az $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat akkor és csak akkor konvergál pozitív valószínűséggel, ha $E|\xi_1| < \infty$. Ha $E|\xi_1| < \infty$, akkor ez a sorozat teljesíti a nagy számok erős törvényét, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = E\xi_1 \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega\textit{-ra.}$$

A nagy számok gyenge törvénye:

Láttuk, hogy az hogy X_n valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan egy (determinisztikus) a konstanshoz tart ekvivalens azzal, hogy e valószínűségi változók sorozata eloszlásban tart a számegyenes a pontjába koncentrált mértékhez. Ez pedig az Alaptétel szerint azzal ekvivalens, hogy ezek a valószínűségi változók $\psi_n(t) = Ee^{itX_n}$ karakterisztikus függvényei az a pontba koncentrált mérték karakterisztikus függvényéhez, azaz az e^{ita} függvényhez tartanak.

Legyenek ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, jelölje ezek részletösszegeit, és $\varphi(t) = Ee^{it\xi_1}$ a ξ_1 karakterisztikus függvényét. E sorozat akkor és csak akkor teljesíti a nagy számok gyenge törvényét, azaz az $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok akkor és csak akkor tartanak sztochasztikusan egy $-\infty < a < \infty$ számhoz, ha teljesül az $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\left(\dfrac{t}{n}\right) = e^{ita}$ minden t számra. Némi számolással belátható, hogy ez ekvivalens azzal, hogy a karakterisztikus függvény a nullában deriválható, és ez a differenciálhányados $\varphi'(0) = ia$. Ez az eredmény azonban nem teljesen kielégítő, ugyanis általában nem a karakterisztikus függvényt, hanem az eloszlásfüggvényt ismerjük. Ezért hasznosabb a következő a Fourier transzormáció tulajdonságain alapuló tétel.

Tétel. *Legyenek ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független, F eloszlású valószínűségi változók sorozata. Ez akkor és csak akkor teljesíti a nagy számok gyenge törvényét, azaz a $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ átlag akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan $n \to \infty$ esetében egy a számhoz, $-\infty < a < \infty$, ami ekvivalens azzal, hogy a $\varphi(t) = Ee^{it\xi_1}$ karakterikus függvény deriválható az origóban, és $\varphi'(0) = ia$, ha*

$$\lim_{x\to\infty} x\left[F(-x) + (1 - F(x))\right] = 0, \quad \textit{és} \quad \lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} xF(\,dx) = a.$$

Ez az eredmény és a múlt alkalommal tárgyalt eredmény a nagy számok erős törvényéről lehetőséget ad olyan példa konstruálására, mely teljesíti a nagy számok gyenge törvényét, de nem teljesíti a nagy számok erős törvényét. Valóban, legyen ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata melyeknek létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye, melyet a következő képlet ad meg. $f(x) = \dfrac{C}{x^2 \log|x|}$, ha $|x| > 2$. $f(x) = 0$, ha $|x| \le 2$, a C konstanst pedig úgy választjuk, hogy $\int f(x)\,dx = 1$. Ekkor $E|\xi_1| = \int |x| f(x)\,dx = \infty$, (Miért?) ezért nem teljesül a nagy számok erős törvénye. Az előbb kimondott, de nem bizonyított tételből következik, hogy ez a sorozat teljesíti a nagy számok gyenge törvényét. De ezt az állítást be lehet látni közvetlenül is. Erről szól a következő (nem kötelező) házi feladat.

> Legyen ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, az $f(x) = \dfrac{C}{x^2 \log|x|}$, ha $|x| > 2$. $f(x) = 0$, ha $|x| \le 2$, képlettel megadott sűrűségfüggvénnyel. ($\displaystyle\int_{|x|>2} \frac{C\,dx}{x^2 \log|x|} = 1$.) Definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Lássuk be, hogy az $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \to 0$, ha $n \to \infty$.
>
> *Segítség:* Legyen $\bar\xi_k = \bar\xi_k^{(n)} = \xi_k I\left(|\xi_k| \le a_n\right)$, $\bar{\bar\xi}_k = \bar{\bar\xi}_k^{(n)} = \xi_k I\left(|\xi_k| > a_n\right)$, és $\bar S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar\xi_k$, $\bar{\bar S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\bar\xi}_k$. Ekkor $P(|S_n| > \varepsilon n) \le P\left(|\bar S_n| > \frac{\varepsilon}{2} n\right) + P\left(|\bar{\bar S}_n| > \frac{\varepsilon}{2} n\right) \le \dfrac{\operatorname{Var} \bar S_n}{\frac{\varepsilon^2}{4} n^2} + nP(\bar{\bar\xi}_1 \ne 0)$. Adjunk az a_n konstans alkalmas megválasztásával (például $a_n = n$) jó becslést a $P(|S_n| > n\varepsilon)$ valószínűségre.