

Az október 10-i gyakorlat témája

Rövid összefoglaló

Ki tudjuk számolni tetszőleges független *egész értékű* valószínűségi változók összegének az eloszlását az adott valószínűségi változók eloszlásának a segítségével. E számolás megfogalmazásának érdekében vezették be diszkrét eloszlások konvolúciójának a fogalmát.

Diszkrét eloszlások konvolúciójának a definíciója. Legyen $\mathcal{P} = p(k)$ és $\mathcal{Q} = q(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, két eloszlás az egész számokon, azaz teljesüljenek a $p(k) \geq 0$, $q(k) \geq 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} p(k) = 1$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} q(k) = 1$ feltételek. Ekkor e két eloszlás konvolúciója a

$$\mathcal{P} * \mathcal{Q}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(j)q(k-j), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

eloszlás.

Tétel. Ha ξ és η két diszkrét egész értékeket felvevő független valószínűségi változó \mathcal{P} és \mathcal{Q} eloszlással akkor $\xi + \eta$ eloszlása a $\mathcal{P} * \mathcal{Q}$ eloszlás.

1. Ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi + \eta$ $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás:

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = k) &= \sum_{j=0}^k P(\xi = j, \eta = k-j) = \sum_{j=0}^k P(\xi = j)P(\eta = k-j) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda^j \mu^{(k-j)} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k. \end{aligned}$$

2. Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j -ik urnába $p_j \geq 0$ valószínűséggel esik, $j = 1, \dots, k$, $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Jelölje η_j a j -ik urnába eső golyók számát. Ekkor az η_j , $j = 1, \dots, k$ valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j = 1, \dots, k$.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
 P(\eta_1 = l_1, \dots, \eta_k = l_k) &= P(\xi = l_1 + \dots + l_k) \frac{(l_1 + \dots + l_k)!}{l_1! \dots l_k!} p_1^{l_1} \dots p_k^{l_k} \\
 &= \frac{\lambda^{(l_1 + \dots + l_k)}}{l_1! \dots l_k!} p_1^{l_1} \dots p_k^{l_k} e^{-\lambda} \\
 &= \frac{\lambda^{l_1} \dots \lambda^{l_k}}{l_1! \dots l_k!} p_1^{l_1} \dots p_k^{l_k} e^{-\lambda(p_1 + \dots + p_k)} = \prod_{j=1}^k \frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!} e^{-\lambda p_j}
 \end{aligned}$$

tetszőleges $l_1 \geq 0, \dots, l_k \geq 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

Poisson mező konstrukciója.

Poisson mező definíciója. Legyen adva egy (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér. Azt mondjuk, hogy az $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$, kijelölt pontok rendszere Poisson mező az (X, \mathcal{A}) mértéktéren μ számlálómértékkel, ha véges μ mértékű A halmazba egy valószínűséggel véges sok kijelölt pont esik, és a pontok eloszlása Poisson eloszlású $\mu(A)$ paraméterrel, továbbá diszjunkt véges mértékű $A_1 \in \mathcal{A}, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ halmazokba eső pontok száma független valószínűségi változók.

Megjegyzés: Az is lehetséges, hogy a kijelölt pontok száma véges, és az is hogy végtelen. Egy pontot többszörös multiplicitással is ki lehet jelölni.

3. Mutassuk meg, a 2. feladat eredményének segítségével, hogy ha (X, \mathcal{A}) mérhető tér, μ véges mérték a \mathcal{A} σ -algebrán, azaz $\mu(X) < \infty$, akkor létezik az (X, \mathcal{A}) téren μ számlálómértékű Poisson mező.

Megoldás: Válasszunk ki véletlen számú pontot $\mu(X)$ paraméterű Poisson eloszlással, ezeket pedig dobjuk le az (X, \mathcal{A}) térre egymástól és a pontok számától függetlenül úgy, hogy egy pont $\frac{\mu(A)}{\mu(X)}$ valószínűséggel essen egy $A \subset X$ mérhető halmazba. Az előző feladat eredménye alapján ez Poisson folyamat.

4. Ha (X, \mathcal{A}) mérhető tér, μ rajta σ -véges mérték, azaz léteznek olyan (diszjunkt) B_1, B_2, \dots , mérhető halmazok, melyekre $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X$, és $\mu(B_n) < \infty$, akkor létezik az (X, \mathcal{A}) téren μ számlálómértékű Poisson mező.

Indoklás: Legyenek B_1, B_2, \dots , diszjunkt, mérhető halmazok, melyekre $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X$, és $\mu(B_n) < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Konstruáljunk az (X, \mathcal{A}, μ) tér megszorításain minde mindegyik B_n halmazra Poisson mezőt μ számlálómértékkel *egymástól függetlenül*. Ezek egyesítése teljesíti a kívánt tulajdonságokat.

- 5.) Minden $x > 0$ -ra

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x} \varphi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ és $\varphi(x)$ a standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény.

Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-u^2/2} du &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{1}{u^2}e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2} + \int_x^\infty \frac{3}{u^4}e^{-u^2/2} du.\end{aligned}$$

Ezen két azonosság alapján $\int_x^\infty e^{-u^2/2} du < \frac{1}{x}e^{-x^2/2}$, és

$$\int_x^\infty e^{-u^2/2} du > \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2},$$

ahonnan következik az állítás.

A sztochasztikus és eloszlásban való konvergencia közötti kapcsolat.

Tárgyaljuk a sztochasztikus és eloszlásban való konvergencia kapcsolatát. Egyszerű példa mutatja, hogy lehetséges az, hogy ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozat eloszlásban konvergál, de sztochasztikusan nem. Ha ξ_1, ξ_2, \dots , független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, nem elfajuló eloszlással, akkor ezen valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak, de sztochasztikusan nem. Belátjuk, hogy ha valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál, akkor eloszlásban is konvergál.

Tegyük fel, hogy valószínűségi változók ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozata sztochasztikusan konvergál egy ξ valószínűségi változóhoz, és jelölje $F(u)$ a ξ valószínűségi változó eloszlását. Legyen x pont az $F(\cdot)$ függvény folytonossági pontja. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, melyre $F(x) - \frac{\varepsilon}{2} < F(x - \delta) \leq F(x) \leq F(x + \delta) < F(x) + \frac{\varepsilon}{2}$, és $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$ küszöbindex, melyre $P(|\xi_n - \xi| > \delta) < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n \geq n_0$. Ekkor $P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x + \delta) + P(|\xi_n - \xi| > \delta) \leq F(x + \delta) + \frac{\varepsilon}{2} \leq F(x) + \varepsilon$. Hasonlóan mutatható meg, hogy $P(\xi_n > x) \leq P(\xi > x - \delta) + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1 - F(x) - \varepsilon$, azaz $P(\xi_n < x) > F(x) - \varepsilon$. Mivel ezek az állítások minden $\varepsilon > 0$ és $n \geq n_0$ számra igazak valamilyen $n = n_0(\varepsilon)$ küszöbindex-szel, innen következik az állítás.

Bár az eloszlásban való konvergenciából nem következik a sztochasztikus konvergencia, igaz a következő gyengébb állítás: Ha a ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak az a pontba koncentrált eloszláshoz valamilyen $-\infty < a < \infty$ számmal, azaz konvergálnak ahhoz az $F(u) = F_a(u)$ eloszlásfüggvényhez, melyre $F(u) = 0$, ha $u \leq a$, és $F(u) = 1$, ha $u > a$, akkor a ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak a $\xi(\omega) \equiv a$ valószínűségi változóhoz. Valóban, ekkor $P(|\xi_n - a| < \varepsilon) = F_n(a + \varepsilon) - F_n(a - \varepsilon + 0) = 1 + (F_n(a + \varepsilon) - F(a + \varepsilon)) - (F_n(a - \varepsilon + 0) - F(a - \varepsilon + 0))$, ahol $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, a ξ_n valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, $G(u + 0) = \lim_{\varepsilon: \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} G(u + \varepsilon)$ egy $G(u)$ eloszlásfüggvényre, és $F(u) = F_a(u)$ az előbb definiált eloszlásfüggvény. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(a + \varepsilon) - F(a + \varepsilon)) = 0$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(a - \varepsilon + 0) - F(a - \varepsilon + 0)) = 0$ az eloszlásban való konvergencia miatt, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - a| < \varepsilon)$, azaz teljesül a sztochasztikus konvergencia is.

Miért csak a határeloszlás folytonossági pontjaiban követeltük meg a konvergenciát az eloszlásban való konvergencia definíciójában?

Amikor eloszlásfüggvényeket vizsgálunk, akkor sokszor érdemes az eloszlásfüggvény helyett az általuk meghatározott valószínűségi mértéket tekinteni. Azaz, adva valamilyen $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényt, definiáljuk azt a $\mu = \mu_F$ valószínűségi mértéket a számegyenesen, melyre $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$. A mértékelmélet eredményeiből következik, hogy létezik ilyen valószínűségi mérték, és azt egyértelműen meghatározza az F eloszlásfüggvény. Ezt a valószínűségi mértéket szemléletesen úgy képzelhetjük el, mint egy tömegeloszlást a számegyenesen, melyre a teljes számegyenes tömege (súlya) 1, és a számegyenes egy részhalmazának a valószínűsége megegyezik a halmaz súlyával. Az, hogy F_n eloszlásfüggvények sorozata konvergál valamely F eloszláshoz valójában azt jelenti, hogy az általuk meghatározott μ_{F_n} tömegeloszlások konvergálnak a μ_F tömegeloszláshoz.

Tekintsük a következő egyszerű példát: Legyen a_n olyan monoton növekedő számsorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ valamely $-\infty < a < \infty$ számra. Legyen μ_n az a valószínűségi mérték, mely az a_n pontba van koncentráva, $n = 1, 2, \dots$, azaz $\mu_n(B) = 1$, ha $a_n \in B$, és $\mu_n(B) = 0$, ha $a_n \notin B$ a számegyenes tetszőleges mérhető részhalmazára. Hasonlóan, legyen μ az a pontba koncentrált mérték. Természetes azt várni, hogy ha alkalmasan definiáltuk az eloszlásban való konvergencia fogalmát, akkor a μ_n eloszlások konvergálnak a μ mértékhez. A μ_n mérték által meghatározott eloszlásfüggvény, azaz egy olyan ξ_n valószínűségi változónak az eloszlásfüggvénye, melyre $P(\xi_n = a_n) = 1$, azaz $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvény, melyre $F_n(u) = 0$, ha $u \leq a_n$, és $F_n(u) = 1$, ha $u > a_n$. Hasonlóan, a μ mérték által meghatározott eloszlásfüggvény az az $F(\cdot)$ függvény, melyre $F(u) = 0$, ha $u \leq a$, és $F(u) = 1$, ha $u > a$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = F(u)$ minden $u \neq a$ számra ebben a példában, de ez a reláció az $u = a$ számra nem teljesül. Tehát a μ_n mértékek eloszlásban konvergálnak ebben a példában, de ehhez szükséges volt az eloszlásban való konvergencia definíciójában azt a megszorítást tenni, hogy csak határeloszlásfüggvény folytonossági pontjaiban követeljük meg a konvergenciát.

A $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ normális eloszlásfüggvény minden pontban folytonos, ezért a centrális határeloszlástétel alkalmazásában nincs jelentősége annak, hogy az eloszlásban való konvergencia csak az eloszlásfüggvény folytonossági pontjaiban követeljük meg konvergenciát. Viszont olyan határeloszlástételben, melyben a határeloszlásnak van szakadási pontja (például a Poisson eloszlás vagy bármely diszkrét eloszlás ilyen) ez a megszorítás lényeges. Kimondunk bizonyítás nélkül egy eredményt, mely ekvivalens feltételt ad arra, hogy eloszlásfüggvények egy sorozata eloszlásban konvergáljon egy határeloszláshoz. Ennek az eredménynek fontos szerepe van a karakterisztikus függvény módszer alkalmazásában is.

Tétel. $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$ eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen értelmezett folytonos, korlátos $g(u)$ függvényre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(u) dF_n(u) = \int g(u) dF(u).$$

Eloszlásban való konvergencia és határeloszlástételek.

Vegyük észre, hogy mivel az $f_t(x) = e^{itx}$, $-\infty < t < \infty$, függvények folytonosak és korlátosak, ezért az eloszlásfüggvényeknek a fenti Tétel-ben kimondott jellemzése alapján eloszlások konvergenciájából következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{itx} F_n(dx) = \int e^{itx} F(dx)$, minden $-\infty < t < \infty$ számra, ha az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F eloszlásfüggvényhez. Felmerül a kérdés: Igaz-e ennek az állításnak a megfordítása is, azaz, ha tudjuk, hogy a $\varphi_n(t) = \int e^{itx} F_n(dx) \rightarrow \varphi(t) = \int e^{itx} F(dx)$, ha $n \rightarrow \infty$ reláció teljesül egy $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvénysorozatra valamint egy F eloszlásfüggvényre, akkor következik-e ebből az, hogy az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F eloszlásfüggvényhez? Az előző formulában bevezetett $\varphi(t) = \int e^{itx} F(dx)$ függvényt nevezzük az F eloszlás karakterisztikus függvényének.

A valószínűségi számítás egyik alapvető fontosságú eredménye szerint a válasz erre a kérdésre igenlő. Jegyezzük meg, hogy ezen állításnak a bizonyításához szükséges egy olyan jellegű eredmény, mely azt mondja ki, hogy az e^{itx} trigonometrikus függvények az összes folytonos és korlátos függvényekből álló halmaznak elég nagy részalma. Ugyanis, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{itx} F_n(dx) = \int e^{itx} F(dx)$ minden $-\infty < t < \infty$

számra, akkor teljesül a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{k=1}^p c_k e^{it_k x} F_n(dx) = \int \sum_{k=1}^p c_k e^{it_k x} F(dx)$ reláció minden

véges lineáris kombinációra is, sőt bizonyos limeszeléssel eljutunk további olyan $g(\cdot)$ függvényekhez, melyekre $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x) F_n(dx) = \int g(x) F(dx)$. De eljutunk-e így minden folytonos és korlátos függvényhez. A valószínűségi számítás egyik mély eredménye szerint igen. (Egy lehetséges eredmény, melyet felhasználhatunk a bizonyításban Weierstrass második approximációs tétele, mely szerint minden 2π szerint periodikus folytonos függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen közelíthető trigonometrikus polinomokkal.) Valójában a valószínűségi számítás előbb jelzett klasszikus eredménye egy még tartalmasabb állítás. Ugyanis a részletesebb vizsgálatokban gyakran találkozunk a következő kérdéssel: Tudjuk, hogy a $\varphi_n(t) = \int e^{itx} F_n(dx)$ karakterisztikus függvények konvergálnak valamely $\varphi(t)$ függvényhez, de nem tudjuk ab ovo, hogy a $\varphi(t)$ függvény előállítható-e, mint egy alkalmas eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye. Az alább megfogalmazott *fundamentális jelentőségű* eredmény az ilyen esetek vizsgálatát is lehetővé teszi.

Eloszlások konvergenciájáról szóló alaptétel. *Legyen ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, F_n eloszlású valószínűségi változók sorozata $\varphi_n(t) = Ee^{it\xi_n} = \int e^{itx} F_n(dx)$ karakterisztikus függvényekkel. Ha a $\varphi_n(t)$ függvények minden $-\infty < t < \infty$ számra konvergálnak egy $\varphi(t)$ függvényhez, mely az origóban folytonos függvény, akkor ez a $\varphi(t)$ limeszfüggvény is karakterisztikus függvény, azaz létezik olyan (egyértelműen meghatározott) $F(x)$ eloszlásfüggvény, melyre $\varphi(t) = \int e^{itx} F(dx)$. Továbbá, az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak ehhez az F eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha F_n eloszlások, $n = 1, 2, \dots$, sorozata eloszlásban konvergál egy F eloszláshoz, akkor minden $-\infty < t < \infty$ számra a $\varphi_n(t) = \int e^{itx} F_n(dx)$ karakterisztikus függvények konvergálnak a $\varphi(t) = \int e^{itx} F(dx)$ karakterisztikus függvényhez, ha $t \rightarrow \infty$. Továbbá ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.

Talán érdemes lett volna ennek az eredménynek a megfogalmazása előtt kimondani a következő tételt.

Tétel. Egy F eloszlásfüggvényt meghatároz annak $\varphi(t) = \int e^{itx} F(dx)$ karakterisztikus függvénye.

A következő állítás bizonyítása házi feladat.

Házi feladat:

Egy $F(x)$ eloszlásfüggvény $\varphi(t) = \int e^{itx} dF(x)$ karakterisztikus függvénye, $-\infty < t < \infty$, folytonos, sőt egyenletesen folytonos függvény a számegeyenesen.

Lássunk példát arra, hogy lehetséges az, hogy F_n , $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények sorozatának a karakterisztikus függvényei egy az origóban nem folytonos függvényhez konvergálnak. Ebben az esetben az F_n eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban egy eloszlásfüggvényhez. Ez a példa megmutatja, hogy a fent kimondott tételben az a megkötés, hogy a $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvények $\varphi(\cdot)$ határfüggvénye az origóban folytonos függvény, nem elhagyható feltétel.

Legyen az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvény a $[-n, n]$ intervallumban egyenletes eloszlás, azaz legyen a sűrűségfüggvénye $f_n(x) = \frac{1}{2n}$, és $f_n(x) = 0$, ha $|x| > n$. Ekkor ezek az F_n , $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények eloszlásban nem konvergálnak egy határeloszláshoz, mert az általuk meghatározott tömegeloszlás "kifolyik a végtelenben." A karakterisztikus függvények a $\varphi_n(t) = \int e^{itx} F_n(dx) = \int_{-n}^n \frac{e^{itx}}{2n} dx = \frac{e^{itn} - e^{-itn}}{2int}$ függvények, $t \neq 0$, $\varphi_n(0) = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = 0$, ha $t \neq 0$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = 1$.

A karakterisztikus függvény másik folytonos tulajdonsága, mely hasznossá teszi határeloszlástételek vizsgálatában az, hogy független valószínűségi változók összegének a karakterisztikus függvénye megegyezik az egyes valószínűségi változók karakterisztikus függvényeinek szorzatával. Képletben kifejezve: Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n független valószínűségi változók. Ekkor

$$Ee^{it(\xi_1 + \dots + \xi_n)} = E(e^{it\xi_1} e^{it\xi_2} \dots e^{it\xi_n}) = Ee^{it\xi_1} Ee^{it\xi_2} \dots Ee^{it\xi_n}.$$

Továbbá, ha egy ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a $\varphi(t) = Ee^{itX}$ függvény, akkor az $AX + B$ karakterisztikus függvénye a

$$\psi(t) = Ee^{it(AX+B)} = e^{itB} Ee^{i(At)\xi} = e^{itB} \varphi(At).$$

E két képlet felhasználásával kifejezhetjük független valószínűségi változók normalizált részletösszegeinek karakterisztikus függvényét az egyes valószínűségi változók karakterisztikus függvényeinek segítségével. Egy ilyen formula valamint az Alaptételnek nevezett eredmény lehetővé teszi azt, hogy független valószínűségi változók normalizált részletösszegeire szóló határeloszlástételeket bizonyítsunk.