Az október 31-i szeminárium témája
Rövid összefoglaló

Feladatok:

Először felidézzük a következő definiciót.

Rendezett minta definiciója. *Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók valamilyen $G(\cdot)$ eloszlásföggvénnyel. Rendezzük ezeket a (véletlen) számokat $\xi_1^*\le\xi_2^*\le\dots\le\xi_n^*$ monoton növekvő sorrendbe. Ekkor a $\xi_1^*\le\xi_2^*\le\dots\le\xi_n^*$ sorozatot n elemű $G(x)$ eloszlsú rendezett mintának nevezzük.*

1. Legyen $\xi_1^*\le\xi_2^*\le\dots\le\xi_n^*$ n elemű rendezett mint olyan $G(\cdot)$ eloszlásfüggvénnyel, melynek létezik $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye. Ekkor e rendezett mintának létezik (n-dimenziós) $h(x_1,\dots,x_n)$ sűrűségfüggvénye, és $h(x_1,\dots,x_n)=n!\prod\limits_{k=1}^n g(x_k)$, ha $x_1\le x_2\le\dots\le x_n$, és $h(x_1,\dots,x_n)=0$, ha ez a feltétel nem teljesül.
2. Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda>0$ paraméterrel, $S_k=\sum\limits_{j=1}^k\xi_j$, $1\le k\le n$. Legyen $U_1(x)\le\dots\le U_{n-1}(x)$ $n-1$ független a $[0,x]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból vett rendezett minta. Ekkor $P(S_1<u_1,\dots,S_{n-1}<u_{n-1}|S_n=x)=P(U_1<u_1,\cdots,U_{n-1}<u_{n-1})$ minden $u_1,\dots,u_n$ számra. Ez az eredmény úgy is interpretálható, hogy az $(S_1,\dots,S_{n-1})$ vektor feltételes eloszlása feltéve, hogy $S_n=x$ egy a $[0,x]$ intervallumban egyenletes eloszlású rendezett mintával egyezik meg.

2a. Az előző jelölésekkel, a $\left(\frac{S_1}{S_n},\dots,\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ vektor független az S_n valószínűségi változótól, és e vektor elemei a $[0,1]$ intervallumban független, egyenletes eloszlású valószínűségi változókból álló rendezett mintát alkotnak.

3. Legyen $\xi_1^*\le\xi_2^*\le\dots\le\xi_{n-1}^*\le\xi_n^*$ valamilyen $[a,b]$ intervallumban független, egyenletes eloszlású valószínűségi változókból készített rendezett minta. Lássuk be, hogy a $\xi_2^*\le\dots\le\xi_{n-1}^*$ sorozat feltételes eloszlása feltéve, hogy $\xi_1^*=x$, $\xi_n^*=y$ megegyezik $n-2$ az $[x,y]$ intervallumban vett független, egyenletes eloszlású valószínűségi változóból képzett rendezett minta eloszlásával.
4. Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független normális eloszású valószínűségi változók ugyanazzal a várható értékkel és szórásnégyzettel. Ekkor a $\bar\xi=\frac1n\sum\limits_{k=1}^n\xi_k$, valószínűségi változó és a $\left(\xi_1-\bar\xi,\dots,\xi_n-\bar\xi\right)$ véletlen vektor független. Továbbá, a véletlen vektor eloszlása nem függ a valószínűségi változók várható értékétől.
5. Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független normális eloszású valószínűségi változók ugyanazzal a várható értékkel és szórásnégyzettel. Ekkor az $s=\sqrt{\frac1n\sum\limits_{k=1}^n\xi_k^2}$, valószínűségi változó

és a $\left\{\dfrac{\xi_1}{s},\dots,\dfrac{\xi_n}{s}\right\}$ véletlen vektor független, továbbá a véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömb felületén.

Annak érdekében, hogy ezeket a feladatokat megoldjuk először értsük meg, hogy egy (sűrűségfüggvénnyel rendelkező) valószínűségi vektor transzformáltjának a sűrűségfüggvényét hogyan tudjuk kiszámolni, illetve hogyan szól az az integráltranszformációs képlet, amelyik egy ilyen számolás alapját képezi. Az eredmény megfogalmazásához először felidézzük egy síma transzformáció Jacobian-jának a definicióját.

Jacobian definiciója. *Legyen $y_k = T_k(x_1,\dots,x_n)$, $1 \le k \le n$, az n-dimenziós tér egy tartományának síma transzformáltja az n-dimenziós tér egy másik tartományába. E transzformáció $\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1,\dots,x_n))$ Jakobiánja egy $(x_1,\dots,x_n)$ pontban a*

$$\left(\frac{\partial T_k(x_1,\dots,x_k)}{\partial x_l}\right),\qquad 1 \le l,k \le n,$$

$n \times n$-es (az $(x_1,\dots,x_n)$ pontban vett derivált) mátrix determinánsának az abszolut értéke.

(A Jacobian szemléletes tartalma: Ez adja meg, hogy az $(x_1,\dots,x_n)$ pont kis környezetének a térfogatát a $\mathbf{T}=(T_1,\dots,T_n)$ transzformáció hányszorosára nagyítja ki.)

Integráltranszformációról szóló képlet. *Legyen adva az n-dimenziós tér egy A tartományának egy síma $y_k = T_k(x_1,\dots,x_n)$, $1 \le k \le n$, transzformáltja az n-dimenziós tér egy másik B tartományába. Legyen továbbá adva a B tartományon egy $f(y_1,\dots,y_n)$ függvény. Ezen $f(y_1,\dots,y_n)$ függvénynek a $\mathbf{T}=(T_1,\dots,T_n)$ transzformáció által meghatározott ősképén azt az A tartományon értelmezett $g(x_1,\dots,x_n)=\mathbf{T}^{-1}f(x_1,\dots,x_n)$ függvényt értjük az A tartományon, melyre*

$$g(x_1,\dots,x_n) = f(T_1(x_1,\dots,x_n),\dots,T_n(x_1,\dots,x_n))$$

minden $(x_1,\dots,x_n) \in A$ pontban. Ekkor

$$\int_B f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n = \int_A \frac{\mathbf{T}^{-1}f(x_1,\dots,x_n)}{\displaystyle\sum_{\substack{\text{olyan } (z_1,\dots,z_n)\in A \text{ pontok} \\ \text{melyekre } T_k(z_1,\dots,z_n)=T_k(x_1,\dots,x_n) \\ k=1,\dots,n}} \frac{1}{\mathcal{J}(\mathbf{T}(z_1,\dots,z_k))}}\,dx_1\dots dx_n.$$

Az 1. feladat megoldása: Legyen B az $A=\{(x_1,\dots,x_n)\colon -\infty < x_1 < x_2 \le \dots < x_n < \infty\}$ halmaz tetszőleges, (mérhető) részhalmaza az n-dimenziós térben. Ekkor $P((\xi_1^*,\dots,\xi_n^*)\in A) = n!P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in A)$, mert $P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in A) =$

$P((\xi_{\pi(1)},\dots,\xi_{\pi(n)}) \in A)$ az $\{1,\dots,n\}$ számok tetszőleges π permutációjára, és különböző permutációkra diszjunkt eseményeket tekintettünk. Innen,

$$P((\xi_1^*,\dots,\xi_n^*) \in B) = \int_B n! g(x_1)\cdots g(x_n)\,dx_1\dots,dx_n,$$

ha $B \subset A$, és $P((\xi_1^*,\dots,\xi_n^*) \in B) = 0$, ha $B \cap A = \emptyset$. Innen következik az állítás.

A 2. feladat megoldása: Számoljuk ki az $(S_1,\dots,S_n)$ vektor sűrűségfüggvényét.

$$P(S_1 < u_1,\dots,S_n < u_n) = P((\xi_1,\dots,\xi_n) \in B) = \int_B \lambda^n e^{-\lambda(y_1+\cdots+y_n)}\,dy_1\,\dots\,dy_n,$$

ahol $B = B(u_1,\dots,u_n) = \{(y_1,\dots,y_n)\colon y_j \ge 0, y_1+y_2+\cdots+y_j < u_j,\ j = 1,\dots,n\}$.

Írjuk át a fenti integrált az $x_j = y_1+\cdots+y_j$, $j = 1,2,\dots,n$ transzformációval. E transzformáció invertálható. Jacobiánja 1, a B halmazt az $\{0 \le x_j < u_j,\ j = 1,\dots,n\}$ halmazba képezi, ezért

$$P(S_1 < u_1,\dots,S_n < u_n) = \int_{\{0\le x_1\le x_2<\cdots\le x_n,\ x_j<u_j,\ j=1,\dots,n\}} \lambda^n e^{-\lambda x_n}\,dx_1\,\dots\,dx_n,$$

ahonnan az $(S_1,\dots,S_n)$ vektor sűrűségfüggvénye $f(x_1,\dots,x_n) = \lambda^n e^{-\lambda x_n}$, ha $0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, és $f(x_1,\dots,x_n) = 0$ egyébként. Innen az S_n sűróségfüggvénye

$$f_n(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots\,dx_{n-1} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x_n},$$

ha $x_n \ge 0$. Megtárgyaltuk, hogy a $P(S_1 < u_1, S_{n-1} < u+n|S_n = x)$ feltételes eloszlás sűrűségfüggvénye az $\dfrac{f(x_1,\dots,x_{n-1},x)}{f_n(x)}$ függvény, ahol az f az $(S_1,\dots,S_n)$ véletlen vektor, az f_n függvény pedig az S_n valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Ez jelen esetben a $h(x_1,\dots,x_{n-1}) = \dfrac{(n-1)!}{x^{n-1}}$, ha $\le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le x$, és $h(x_1,\dots,x_{n-1}) = 0$ egyébként, és ez $n-1$ független és a $[0,x]$ intevallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból készített rendezett minta sűrűségfüggvénye. Számítsuk ki az $\left(\dfrac{S_1}{S_n},\dots,\dfrac{S_{n-1}}{S_n},S_n\right)$ vektor sűrűségfüggvényét az $(S_1,\dots,S_n)$ vektor sűrűségfüggvényének ismeretében.

$$\begin{aligned}
P&\left(\frac{S_1}{S_n} < u_1,\dots,\frac{S_{n-1}}{S_n} < u_{n-1}, S_n < x\right) \\
&= P(S_1 < S_n u_1,\dots,S_{n-1} < S_n u_{n-1}, S_n < x) \\
&= \int_{\{0\le y_j<u_j y_n,\ j=1,\dots,n,\ 0\le y_n<x\}} f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n.
\end{aligned}$$

Végezzük el az $x_j = y_j y_n$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ és $x_n = y_n$ helyettesítésket. E transzformáció Jacobiánja x_n^{n-1}, és

$$P\left(\frac{S_1}{S_n} < u_1, \dots, \frac{S_{n-1}}{S_n} < u_{n-1}, S_n < x\right)$$
$$= \int_{\{0 \le x_j < u_j,\, j=1,\dots,n,\, 0 \le x_n < x\}} x_n^{n-1} f\left(\frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n_1}}{x_n}, x_n\right) dx_1 \dots dx_n.$$

Innen a keresett sűrűségfüggvény $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda x_n} x_n^{n-1}$, ha $0 \le x_1 < x_1 < lex_{n-1} \le 1$, és $x_n \ge 0$. Ez azt jelenti, hogy $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = g(x_1, \dots, x_{n-1}) h(x_n)$, ahol $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = (n-1)!$, ha $0 \le x_1 \le \dots \le x_{n-1}$, $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$, egyébként, $g(x_n) = \dfrac{x_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x_n}$, ha $x_n \ge 0$, $g(x_n) = 0$, ha $x_n < 0$. Ez azt jelenti, hogy az $\left(\dfrac{S_1}{S_n}, \dots, \dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ vektor és S_n valószínűségi változók függetlenek, a tekintett vektor eloszlása megegyezik $n-1$ független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból készített rendezett mint eloszlásával, az S_n vektor eloszlása pedig n független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlása.

A 3. feladat megoldása: A $\xi_1^* \le \xi_2^* \le \dots \le \xi_{n-1}^* \le \xi_n^*$ vektor sűrűségfüggvénye a

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(b-a)^n} & \text{ha } a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény.

Innen, és az előző gyakorlaton tárgyalt eredmények alapján a $(\xi_2^*, \dots, \xi_{n-1}^*)$ véletlen vektor feltételes sűrűségfüggvénye, feltéve a $\xi_1^* = x$, $\xi_n^* = y$, $a < x < y < b$, feltételt, a $\dfrac{g(x, x_2, \dots, x_{n-1}, y)}{f(x,y)}$ függvény, ahol $f(x,y) = n(n-1)\dfrac{(y-x)^{n-2}}{(b-a)^n}$, $a < x < y < b$ függvény a (ξ_1^*, ξ_n^*) vektor sűrűségfüggvénye. Ez viszont megegyezik $n-2$ független, az $[x,y]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból készített rendezett minta eloszlásával.

Házi feladat:

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, egy $[a,b]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók, és definiáljuk a $\xi_1^* = \min\limits_{1 \le j \le n} \xi_j$ és $\xi_n^* = \max\limits_{1 \le j \le n} \xi_j$ valószínűségi változókat. Bizonyítsuk be, hogy a (ξ_1^*, ξ_n^*) valószínűségi vektornak van sürűségfüggvénye, és az az $f(x,y) = n(n-1)\dfrac{(y-x)^{n-2}}{(b-a)^n}$ függvény, ha $a < x < y < b$, és $f(x,y) = 0$ egyébként.

A második feladatban szereplő érvelés segítségével beláthatjuk a következő eredményt: Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ egy n-dimenziós véletlen vektor $f(x_1, \dots, x_n)$ sűrűségfüggvénnyel, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ennek olyan $\eta_k = T_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $k = 1, \dots, n$, transzformáltja, melyre az $y_k = T_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, dots, n$, függvények símák, és a $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ transzformáció az R^n térből az R^n tér egy tartományába invertálható, azaz a

$$\mathbf{T}(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$$

egyenletnek legfeljebb egy megoldása van minden $(y_1, \dots, y_n)$ pontra. Ekkor az előbb definiált $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektornak van $g(y_1, \dots, y_n)$ sűrűségfüggvénye, és

$$g(y_1, \dots, y_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1, \dots, x_n))}, \quad \text{ha } (y_1, \dots, y_n) = \mathbf{T}(x_1, \dots, x_n),$$

(és $g(y_1, \dots, y_n) = 0$, ha a fenti egyenletnek nincs megoldása.)

Valóban, jelőlje, $\mathbf{S}$ a $\mathbf{T}$ transzformáció inverzét, és $I(C)$ egy $C \subset R^n$ halmaz indiktorfüggvényét. Ekkor $\mathcal{J}(\mathbf{S}(x_1, \dots, x_n)) = \dfrac{1}{\mathcal{J}(\mathbf{T}(y_1, \dots, y_n))}$, ha $x_k = \mathbf{T}_k(y_1, \dots, y_n)$, $1 \le k \le n$, és

$$\begin{aligned} P((\eta_1, \dots, \eta_n) \in B) &= P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{S}(B)) \\ &= \int f(y_1, \dots, y_n) I(\{(y_1, \dots, y_n) \ \in \mathbf{S}(B)\})\, dy_1 \dots dy_n \\ &= \int f(\mathbf{S}(x_1, \dots, x_n)) I((x_1, \dots, x_n) \in B) \mathcal{J}\,(\mathbf{S}(x_1, \dots, x_n))\, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_B \frac{f(\mathbf{S}(x_1, \dots, x_n))}{\mathcal{J}(\mathbf{T}([\mathbf{S}(x_1, \dots, x_n]))}\, dx_1 \dots dx_n = \int_B g(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

minden mérhető $B \in R^n$ halmazra, ahonnan következik az állítás.

A fenti eredményt lehet általánosítani arra az esetre, amikor a $\mathbf{T}$ transzformáció nem invertálható, de ezzel a kérdéssel nem foglalkozunk.

A 4. feladat egy lehetséges megoldása: Vezessük be az $\eta_k = \xi_k - \bar{\xi}$ jelölést, $k = 1, \dots, n$. Ekkor $\eta_n = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \eta_k$, ezért elég megmutatni, hogy az $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \bar{\xi})$ vektor utolsó koordinátája független az első $n-1$ koordinátától. Ezt megmutatjuk, ha ennek a vektornak megadjuk a sűrűségfüggvényét, és azt megfelelő alakban írjuk fel. A sűrűségfüggvényt ki tudjuk számítani az előző megjegyzés alapján.

Definiáljuk a $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$, $T_k(x_1, \dots, x_n) = x_k - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$, $1 \le k \le n-1$, $T_n(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$, leképezést az R^n téren. Ekkor $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \bar{\xi}) = \mathbf{T}(\xi_1, \dots, \xi_n)$. A $\mathbf{T}$ leképezés lineáris, ezért Jacobian-ja konstans. (Ezt a konstanst ki tudnánk számolni, de erre nem lesz szükségünk.) Ha $\mathbf{T}(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, akkor $x_k = y_k + y_n$, $1 \le k \le n-1$, $x_n = y_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j$. Innen következik, hogy amennyiben a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektor sűrűségfüggvénye $f(x_1, \dots, x_n)$, akkor az $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \bar{\xi})$ sűrűségfüggvénye

$$g(y_1, \dots, y_n) = \text{const.}\, f\left(y_1 + y_n, \dots, y_{n-1} + y_n, y_n - \sum_{j=1}^{n-1} y_j\right)$$

alkalmas konstans szorzóval.

Számítsuk ki a $g(y_1, \dots, y_n)$ sűrűségfüggvényt abban az esetben, ha $f(x_1, \dots, x_n)$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változókból álló vektor sűrűségfüggvénye, azaz, $f(x_1, \dots, x_n) = \text{const.}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)\right\}$. (Az általános eset hasonlóan tárgyalható.)

$$\begin{aligned} g(y_1, \dots, y_n) &= \text{const.}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(y_k^2 + y_n) + \left(y_n - \sum_{j=1}^{n-1} y_j\right)^2\right)\right\} \\ &= \text{const.}\,\exp\left\{-\frac{1}{2} n y_n^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} y_j\right)^2\right)\right\}. \end{aligned}$$

Innen küvetkezik az állítás.

Az 5. feladat megoldása: Vegyük észre, hogy a $\xi_1, \dots, \xi_n$ vektor $f(x_1, \dots, x_n)$ sűrűségfüggvénye, csak az $(x_1, \dots, x_n)$ vektor hosszától függ, azaz $f(x_1, \dots, x_n) = F(r)$, $r = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$, alkalmas $F(r)$ függvénnyel. Tekintsünk egy az n-dimenziós egységgömb határán egyenletes eloszlású $(U_1, \dots U_n)$ véletlen vektort, azaz legyen $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k^2 = 1$ egy valószínűéseggel, és legyen az $(U_1, \dots U_n)$ eloszlása invariáns az n-dimenziós tér minden forgatása esetén. Legyen V az $(U_1, \dots U_n)$ vektortól független $F(x)$ eloszlású valószínűségi változó, és $(Z_1, \dots, Z_n) = (U_1 V, \dots, U_n V)$. Ekkor a $(Z_1, \dots, Z_n)$ vektor eloszlása megegyezik az $\xi_1, \dots, \xi_n$ vektor eloszlásával. Továbbá, az $S = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} Z_j^2} = V$ és $\left(\frac{Z_1}{S}, \dots, \frac{Z_n}{S}\right) = (U_1, \dots, U_n)$ vektorok függetlenek, és az utóbbi vektor az egységgümb határán egyenletes eloszlású. Mivel e valószínűségi változók együttes eloszlása megegyezik az s és $\frac{\xi_1}{s}, \dots, \frac{\xi_n}{s}$ valószínűségi változók együttes eloszlásával, innen következik a feladat állítása.