Az október 3-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Állítás. *Egy k változós $f(x_1,\dots,x_k)$ akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ valószínűségi vektornak, ha teljesíti az $f(x_1,\dots,x_k)\ge 0$ minden $(x_1,\dots,x_k)\in\mathbf{R}^k$ pontban, és*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_k)\,dx_1\dots dx_k=1.$$

Adva egy $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlású $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ valószínűségi vektor, akkor annak valószínűsége, hogy ez a véletlen vektor beleesik egy $\mathbf{B}\subset\mathbf{R}^k$ (mérhető) halmazban

$$P\left((\xi_1,\dots,\xi_k)\in\mathbf{B}\right)=\int_{\mathbf{B}} F(\,dx_1,\dots,\,dx_k).$$

Kissé általánosabban, ha $g(x_1,\dots,x_k)$ k-változós függvény, akkor

$$Eg(\xi_1,\dots,\xi_k)=\int g(x_1,\dots,x_k)F(\,dx_1,\dots,\,dx_k).$$

Ha az $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(x_1,\dots,x_k)$ sűrűségfüggvénye, akkor

$$P\left((\xi_1,\dots,\xi_k)\in\mathbf{B}\right)=\int_{\mathbf{B}} f(x_1,\dots,x_k)\,dx_1\dots dx_k,$$

és

$$Eg(\xi_1,\dots,\xi_k)=\int g(x_1,\dots,x_k)f(x_1,\dots,x_k)\,dx_1,\dots,\,dx_k.$$

Speciálisan, ha ξ és η két független valószínűségi változó $F(x)$ és $G(y)$ eloszlásfüggvénnyel, ($f(x)$ és $g(y)$ sűrűségfüggvénnyel) akkor a (ξ,η) vektornak az eloszlásfüggvénye $F(x)G(y)$, (sűrűségfüggvénye pedig $f(x)g(y)$). Ezért a fentiek alapján a $\xi+\eta$ összeg eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned}P(\xi+\eta<x)&=\int\int_{(u,v),u+v<x} F(\,du)G(\,dv)\quad\text{és ha létezik sűrűségfüggvény}\\&=\int\int_{(u,v),u+v<x} f(u)g(v)\,du\,dv\quad\text{minden } x\in\mathbf{R}\text{ számra.}\end{aligned}$$

Ennek alapján meg tudjuk érteni, hogy független valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét hogyan lehet kiszámítani az eredeti valószínűségi változók sűrűségfüggvényei konvoluciójának a segítségével. Ha ξ és η két független valószínűségi változó

$f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor a $\xi+\eta$ összeg sűrűségfüggvénye $h(x) = \dfrac{d}{dx}P(\xi+\eta<x)$ a következő módon számolható ki:

$$h(x) = \frac{d}{dx}P(\xi+\eta<x) = \frac{d}{dx}\int\int_{\{(u,v)\colon\ u+v<x\}} f(u)g(v)\,du\,dv$$
$$= \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar u)g(\bar v-\bar u)\,d\bar u\right]d\bar v = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du$$

A fenti számolások első azonosságában egy integráltranszformációt alkalmaztunk $\bar v = u+v$, $\bar u = u$ helyettesítéssel (majd később $\bar u$ és $\bar v$ helyett ismét u és v változót írtunk.) Felhasználtuk, hogy e transzformáció során az $\{(u,v)\colon u+v<x\}$ tartomány a $\{(\bar u,\bar v)\colon \bar v<x,\ -\infty<\bar u<\infty\}$ tartományba megy át, és a fenti (lineáris) transzformáció Jakobiánja azonosan 1. Az utolsó azonosságban a $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} H(v)\,dv = H(x)$ azonosságot alkalmaztuk $H(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v-u)\,du$ választással.

1. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ha $x\ge 0$, és $f(x)=0$, ha $x>0$. Számítsuk ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét. Általánosabban, legyenek $\xi_1,\dots\xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda>0$ paraméterrel. Számítsuk ki $\xi_1+\cdots+\xi_m$ sűrűségfüggvényét.

   Ki kell számolnunk az $f*f(x)$ illetve $\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x)=0$, ha $x\le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y\le 0$ vagy $x-y\le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x\ge 0$ esetén lehet nulla, az $x\le 0$ esetben $f(y)f(x-y)>0$ minden y-ra nulla, és $x\ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y)>0$ integrandus csak $0\le y\le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x)=f*f(x)$ $x<0$-ra $f_2(x)=0$, és

$$f_2(x)=f*f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy$$
$$=\int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy=\lambda^2 x e^{-\lambda x},\quad \text{ha } x\ge 0.$$

   Hasonlóan, ha $f_m(x)=\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1+\cdots\xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x)=0$ minden $m\ge 1$ számra, ha $x<0$. Azt állítjuk, hogy $f_m(x)=\dfrac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1}*f(x)=f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$f_{m-1}*f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x \lambda^{m-1}\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\lambda e^{-\lambda y}e^{-\lambda(x-y)}\,dy$$
$$=\lambda^m e^{-\lambda x}\int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy=e^{-\lambda x}\frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!},\quad \text{ha } x\ge 0.$$

2. Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\dfrac{\xi}{\eta}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

   Megoldás. Az eloszlásfüggvény

$$F(x) = P\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = \iint_{v<xu} \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}\, du\, dv$$
$$= 2\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}<\varphi<\arctan x} \int_0^\infty re^{-r^2/2}\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x,$$

   a sűrűségfüggvény pedig $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

   Második megoldás. A (ξ, η) vektor sűrűségfüggvénye $\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen k0vetkeik, hogy annak valószínűsége, hogy a (ξ, η) vektor egy origóból kiinduló α szögű szögtartományba esik, $\dfrac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

$$P\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = P\left((\xi,\eta) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \arctan x\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \arctan x + \pi\right) \text{ szögtartományban}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} 2\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.$$

3.) Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2+\eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

   Megoldás: $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$. Írjuk fel ξ^2 sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-x/2}$, és $\xi^2+\eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{u(x-u)}\pi} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2}\, du = e^{-x/2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}\pi}\, dv = \frac{1}{2}e^{-x/2}$$

   Megjegyzés: Az x paramétertől függő $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}\pi}\, dv$ integrált meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Hogyan? Vagyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}\pi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (v-\frac{1}{2})^2}}.$$

4. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó akkor $\sigma\xi + m$ egy m várható értékű és σ-négyzet szórásnégyztű normális eloszlású valószínűségi változó. Legyen η_1 és η_2 két független normális eloszlású vaószínűségi változó m_1 illetve m_2 várható

értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel. Lássuk be, hogy $\eta_1+\eta_2$ m_1+m_2 várható értékű és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás: Egy ξ valószínűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$. Ezért, $\eta_1+\eta_2$ sűrűségfüggvénye

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-(u-m_1)^2/2\sigma_1^2} e^{-(x-u-m_2)^2/2\sigma_2^2}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Bigg\{-u^2\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}\right) + u\left(\frac{m_1}{\sigma_1^2}+\frac{x-m_2}{\sigma_2^2}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\Bigg\}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Bigg\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(u - \frac{m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 \\
&\qquad\qquad + \frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\Bigg\}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left\{\frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Házi feladat:

Legyen ξ és η két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki $\xi-\eta$ sűrűségfüggvényét.