A szeptember 12-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Először a következő kérdést vizsgáltuk:

Legyen egy urnában 70 piros és 30 fehér golyó. Húzzuk ki a golyókat visszatevés nélkül.

a.) Mi a valószínűsége annak, hogy az első kihúzott golyó színe piros, a másodiké pedig fehér?

b.) Mi a valószínűsége annak, hogy a 13. kihúzott golyó színe piros, a 29. kihúzott golyó színe pedig fehér?

Számunkra a feladat b.) része volt érdekes. Megtárgyaltuk, hogy az a.) és b.) kérdésre ugyanaz a válasz. Ezen állítás bizonyítása és megértése érdekében megfogalmaztuk a feladatot formálisan egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező bevezetésével.

A következő modellt definiáltuk: Tekintsük az összes $\omega = (F, P, F, F, \dots)$ száz hosszúságú 30 F (fehér) és 70 P (piros) jelből álló sorozatot. Legyen Ω az összes ilyen ω sorozatól álló halmaz, $\mathcal{A}$ a (mérhető) halmazok rendszere (σ-algebrája) Ω összes részhalmaza, azaz minden lehetséges fent definiált ω (elemi eseményekből) álló halmaz. Legyen minden ω elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{\binom{100}{30}}$. Egy A halmaz valószínűsége pedig az A halmaz által tartalmazott elemi események valószínűségének összege. Ebben a modellben az a.) feladat valószínűsége azon A esemény valószínűsége, mely azokat az ω sorozatokat tartalmazza, melyek első eleme P második eleme pedig F. A b.) feladatban annak a B eseménynek a valószínűségét vizsgáljuk, melyek olyan ω sorozatokat tekint, melyek 13. jele P 29. jele pedig F. Beláttuk természetes megfeleltetéssel, hogy $P(A) = P(B)$.

Valójában a fenti tárgyalás nem teljesen kielégítő. Látnunk kell ugyanis, hogy nincs jelentősége annak, hogy a minket érdeklő valószínűségeket milyen a feltételeket kielégítő modellben tekintjük. Ezért érdemes a fenti gondolatmenetet úgy módosítani, hogy az érvelés ne függjön attól, hogy milyen modellt tekintünk.

Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, mely tartalmazza az összes olyan eseményt, hogy egy húzássorozat eredménye valamilyen $(F, P, F, F, \dots)$ száz hosszúságú 30 F (fehér) és 70 P (piros) jelből álló sorozat. (Nem tesszük fel, hogy ezek az események elemi események.) Minden ilyen esemény valószínűsége legyen $\frac{1}{\binom{100}{30}}$. Vegyük észre, hogy ilyen módon a valószínűségi mező egy partícióját kapjuk. (Diszjunkt eseményeket definiáltunk, melyek összvalószínűsége 1.) Definiáljuk a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. (Azaz, ha az előbb definiált partició olyan sorozatot tartalmaz, melynek j-ik jele P illetve F.) Ekkor a minket érdeklő kérdés a $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0)$ (a.) feladat), illetve a $P(\xi_{13} = 1, \xi_{29} = 0)$ valószínűség (b.) feladat) kiszámítása.

Be lehet látni, hogy a fenti jelölésekkel

$$P(\xi_1=\varepsilon_1,\xi_2=\varepsilon_2,\dots,\xi_{100}=\varepsilon_{100})=P(\xi_{\pi(1)}=\varepsilon_1,\xi_{\pi(2)}=\varepsilon_2,\dots,\xi_{\pi(100)}=\varepsilon_{100}),$$

ahol $(\pi(1),\dots\pi(100))$ az $(1,\dots,100)$ számok tetszőleges permutációja, ε_j, $1\le j\le 100$ vagy nullla vagy egy. Ez az azonosság lehetővé teszi annak bizonyítását, hogy az a) és b) feladatban szereplő valószínűségek megegyeznek.

Házi feladat

Ha a $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ egész értékű valószínűségi változók teljesítik a

$$P(\xi_1=k_1,\xi_2=k_2,\dots,\xi_n=k_n)=P(\xi_{\pi(1)}=k_1,\xi_{\pi(2)}=k_2,\dots,\xi_{\pi(n)}=k_n),$$

azonosságot az $1,2,\dots,n$ számok tetszőleges $(\pi(1),\dots\pi(n))$ permutációjára és minden $k_1,\dots,k_n$ egész számra, akkor

$$P(\xi_i=k_1)=P(\xi_1=k_1),\quad P(\xi_i=k_1,\xi_j=k_2)=P(\xi_1=k_1,\xi_2=k_2)$$

mainden $1\le i,j\le n$ és k_1 és k_2 egész számra.

További a gyakorlaton tárgyalt feladatok:

1.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 100-szor egymás után. Számítsuk ki a fejdobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.
2.) Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Tekintsük a dobások eredményeinek összegét. Számítsuk ki ennek az összegnek
   a.) Várható értékét,
   b.) Szórásnégyzetét.

Idézzük fel először a várható érték és szóráanégyzet definicióját és néhány fontos velük kapcsolatos eredményt.

Várható érték és szórásnégyzet definiciója. *Legyen ξ diszkrét érékű valószínűségi változó, mely megszámlálható sok $x_1,x_2,\dots$ értéket vesz fel, $P(\xi=x_k)=p_k$, $k=1,2,\dots,$ akkor a ξ valószínűségi változó várható értéke $E\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_kx_k$, szórásnégyzete pedig* $\operatorname{Var}\xi=E(\xi-E\xi)^2=E\xi^2-(E\xi)^2$.

Tétel. $E(a\xi+b)=aE\xi+b$, $\operatorname{Var}(a\xi+b)=a^2\operatorname{Var}\xi$ *minden valós a és b számra.*

Tétel. *Ha ξ diszkrét értékű valószínűségi változó, $P(\xi=x_k)=p_k$, $k=1,2,\dots,$ $f(x)$ valamilyen függvény, akkor $Ef(\xi)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_kf(x_k)$.*

Tétel. *Ha $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, akkor $E(\xi_1+\dots+\xi_n)=E\xi_1+\dots+E\xi_n$.*

Megjegyzés; Ez az eredmény tetszőleges valószínűségi változókra igaz. Nem követeltük meg például azt, hogy az összeadandók függetlenek legyenek.

Tétel. *Ha* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *független valószínűségi változók, akkor* $\mathrm{Var}\,(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \mathrm{Var}\,\xi_1 + \cdots + \mathrm{Var}\,\xi_n$.

Az 1. és 2. feladat jobb megértése érdekében definiáljunk egy valószínűségi mezőt és rajta valószínűségi változókat, melyek segítségével ezt a feladatot precizen meg lehet fogalmazni.

1. *A feladat megoldása:* A fejdobások száma 0 és í00 között van. Annak valószínűsége, hogy k fejdobás következik be, $0 \le k \le 100$, $p_k = \binom{100}{k} 2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100}$, ahol ξ jelőli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Továbbá $E\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{100} k^2 \binom{100}{k} 2^{-100}$, a szórásnégyzet pedig $\mathrm{Var}\,\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. Ezeket az összegeket közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, $k\binom{100}{k} = 100\binom{99}{k-1}$, $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k\binom{100}{k} 2^{-100} = 50 \sum\limits_{k=0}^{99} k \binom{99}{k} 2^{-99} = 50\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{99} = 50$. Továbbá, $k^2\binom{100}{k} = [k(k-1)+k]\binom{100}{k} = 100 \cdot 99 \cdot \binom{98}{k-2} + 100 \cdot \binom{100}{99}$, $E\xi^2 = \frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 99 \cdot \sum\limits_{k=0}^{98} \binom{98}{k} + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \sum\limits_{k=0}^{99} \binom{99}{k} = 25 \cdot 99 + 50$, $\mathrm{Var}\,\xi = E\xi^2 - (E\xi^2) = 25$.

   Valójában a vizsgált várható értéket és szórásnégyzetet egyszeűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a ξ_j valósz1nűségi változókat, $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} E\xi_j$, $\mathrm{Var}\,\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \mathrm{Var}\,\xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = \frac{1}{4}$, $1 \le j \le 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, $\mathrm{Var}\,\xi = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$.

A második feladat hasonlóan tárgyalható. Ekkor annak valószínűségét, hogy a dobások üsszegének értéke egy adott szám rendkívül fáradságos lenne kiszámolni. Viszont a második módszer egyszerűen alkalmazható ebben az esetben is. Legyenek $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változók, melyekre $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és szórásnégyzet $E \sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} E\eta_j$, $\mathrm{Var} \sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} \mathrm{Var}\,\eta_j$. (A második reláció felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.) $E\eta_j = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$, $E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$, $\mathrm{Var}\,\eta_j = \frac{35}{12}$, $E\xi = 350$, $\mathrm{Var}\,\xi = \frac{3500}{12}$.

Házi feladat

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk százszor egymás után. Tekintsük a fejdobások számńak a harmadik hatványát, és számítsuk ki annak várható értékét.

3.) Legyen egy urnában 70 piros és 30 fehér golyó. Húzzuk ki a golyókat visszatevés nélkül. Számítsuk ki az első 10 húzásban kihízott piros golyók számának

a.) Várható értékét,

b.) Szórásnégyzetét. (Ez utóbbi feladatot a következő gyakorlaton tárgyaltuk.)

Az első két feladathoz hasonlóan tárgyalható a harmadik feladat. Ekkor megfelelő modellben a vizsgált feladat az $E\sum\limits_{j=1}^{20}\xi_j$ és $\mathrm{Var}\sum\limits_{j=1}^{20}\xi_j$ kiszámítása, ahol $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Ekkor $E\sum\limits_{j=1}^{20}\xi_j = \sum\limits_{j=1}^{20}E\xi_j$. A szórásnégyzet kiszámítása kissé bonyolultabb, mert a tekintett valószínűségi változók nem függetlenek. Ezért meg kell értenünk, hogyan kell kiszámítani valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetét az általános esetben.