A szeptember 19-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Először a következő kérdést vizsgáltuk: (Ez az elöző gyakorlatban szereplő egyik feladat vizsgálatának folytatása volt.)

1. Legyen egy urnában 30 piros és 70 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Az előzó gyakorlaton kiszámoltuk a kihúzott piros golyók számának várható értékét. Most számoljuk ki ennek szörásnégyzetét is.

A $\xi = \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg szórásnégyzetét kell kiszámolnunk, ahol $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$ ha a j-ik húzás eredménye fehér, $j = 1, 2, \dots, 20$. Ennek kiszámítása bonyolultabb mint az előzó gyakorlaton tekintett feladatokban, mert a most tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek. Ezért meg kell értenünk, hogyan kell kiszámítani valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetét az általános esetben.

Tétel. *Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, akkor*

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Var}\xi_j + 2 \sum_{1\le j<k<n} (E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k).$$
$$= \sum_{j=1}^n \operatorname{Var}\xi_j + \sum_{1\le j,k\le n,\ j\ne k} (E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k).$$

Megjegyzés: Ha ξ és η két valószínűségi változó, akkor ezek kovarianciája $\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E\xi\eta - E\xi E\eta$. A kovariancia egy természetes mérése annak, hogy két valószínűségi változó milyen mértékben függ össze. Ez a mennyiség szerepelt az összeg szórásnégyzetének kifejezésében. Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = 0$.

A Tétel bizonyítása.

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right) = E\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)^2 - \left(E\sum_{j=1}^n \xi_j\right)^2 = E\left(\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k\right) - \left(\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n E\xi_j E\xi_k\right)$$
$$= \sum_{j=1}^n \left(E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2\right) + 2\sum_{1\le j<k<n} (E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k).$$

és $E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \operatorname{Var}\xi_j$.

Alkalmazva ezt a tételt és az előző gyakorlat eredményeit kapjuk, hogy $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{2}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \frac{2}{5}\cdot\frac{29}{99} - \frac{4}{25} =$

$-\frac{6}{495}$, ha $j \neq k$, és $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2$ minden $1 \leq j < k \leq 20$ számra. Innen a 10 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $10 \cdot \frac{2}{5} = 4$ és szórásnégyzete $10 \cdot \frac{6}{25} - 90 \cdot \frac{6}{2475} = \frac{12}{5}\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{24}{11}$.

Házi feladat.

Egy urnában húsz piros és harminc fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 10 golyót úgy, hogy amikor kihúzunk egy golyót akkor azt visszadobjuk és vele együtt bedobunk az urnába egy vele azonos színű golyót. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?

Segítség: Lássuk be, hogy annak valószínűsége, hogy a j-ik húzásban piros golyót húzunk megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzásban piros golyót húzunk. Annak valószínűsége, hogy az i-ik és j-ik húzásban piros golyót húzunk, $i \neq j$, megegyezik annak valószínűségével, hogy az első és második húzásban piros golyót húzunk.

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk végtelen sokszor egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a harmadik 6-os dobás az n-ik dobásban következik be, $n = 3, 4, 5, \cdots$?

   Megoldás: Ez az esemény akkor következik be, ha az első $n-1$ dobásban pontosan két hatost dobunk, és az n-ik dobús eredménye is hatos. Ennek valószínűsége, $\binom{n-1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

Ezt a feladatot nem annyira önmaga miatt tárgyaltuk, (ez egyébként példa a negatív binomiális eloszlás megjelenésére), hanem azért, hogy megtárgyaljuk, hogyan lehet egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni dobásának a valószínűségi modelljét megadni. Ez remélhetőleg érthetőbbé teszi miért kell a valószínűségi mező fogalmában néhány első látásra túlkomplikált fogalmat bevezetni.

Természetes az elemi eseményeket a végtelen $\omega = (j_1, j_2, \dots)$ sorozatokként definiálni, ahol mindegyik j_n, $n = 1, 2, \dots$, szám az $1, 2, \dots, 6$ értékek valamelyikét veszi fel. A biztos Ω esemény az összes alább tekintett sorozatokból álló halmaz. Természetes lenne eseményeknek az Ω halmaz részhalmazait tekinteni. Utána meg kell adni az eseményeknek a valószínűségét. És itt jelennek meg a nehézségek. Ugyanis egyrészt minden ω elemi esemény valószínűsége nulla, másrészt Ω kontinum sok elemi eseményből áll. Hogyan kell definiálni a valószínűséget úgy, hogy az tükrözze azt, hogy egy szabályos dobókocka egymástól független dobásait írja le?

Legyen annak a valószínűsége, hogy az első n koordinátan előírt értékű $j_1, \dots, j_n$ számok, (azaz azon végtelen sorozatokból álló halmaz, melynek jelei a $j_1, \dots, j_n$ számokkal kezdődnek) $\left(\frac{1}{6}\right)^n$. A valószínűséget úgy szeretnénk definiálni, hogy ezek a feltételek teljesüljenek. Mivel a valószínűség σ-additiv ez sok egyéb esemény valószínűségét is meghatározza. Például hogyan határozza meg annak valószínűségét, hogy az ötödik dobás eredménye nagyobb mint a harmadik dobásé? Általában értelme van bizonyos események által meghatározott legszűkebb σ-algebráról beszélni. Halmazok egy $\mathcal{A}$

rendszerét σ-algebrának nevezzük, ha $A_n \in \mathcal{A}$ esetében, $n = 1, 2, \dots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, $\Omega \setminus A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$. Be lehet látni, hogy az előbbi $j_1, \dots, j_n$ számokkal kezdődő sorozatok halmazát, $n = 1, 2, \dots$, tartalmazó σ-algebrák között van egy legszűkebb σ-algebra, azaz egy olyan σ-algebra, amelyik része egy tetszőleges ezeket a halmazokat tartalmazó σ-algebrának. Ennek az állításnak a bizonyítása viszonylag egyszerű. Lényegesen nehezebben, de szintén bizonyítható állítás az, hogy ezen a legszűkebb σ-algebrán megadható egyértelműen egy olyan σ-additiv halmazfüggvény, amelyiknek értéke a már megadott halmazokon az előírt értékkel egyezik meg. Ennek alapján az előbbi halmazokat tartalmazó legszűkebb σ-algebrát tekintjük az $\mathcal{A}$ σ-algebrának, az $A \in \mathcal{A}$ halmazok P valószínűségét pedig a következő módon definiáljuk. Tekintjük az első n koordinátájában előírt $j_1, \dots, j_n$ értéket felvevő sorozatokból álló halmazokat tartamazó legszűkebb $\mathcal{A}$ σ-algebrát, egy $j_1, \dots, j_n$ jegyekkel kezdődő sorozatokból álló halmaz valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^n$, (ahol n a rögzített értékű jegyek száma), és tekintjük azt az egyértelműen meghatározott P σ-additiv halmazfüggvényt az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, melynek értéke az előbb definiált halmazokon a már definiált értékkel egyenlő. Egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz valószínűsége ennek a P σ-additiv halmazfüggvénynek az A halmazon felvett értékével egyenlő.

Felmerül az a kérdés, hogy természetes-e a fenti definició. Miért nem definiáltuk például minden lehetséges halmaz valószínűségét? A válasz erre a kérdésre az, hogy ez nem lehetséges úgy, hogy megőrizzük a valószínűség σ-additiv tulajdonságát. Másrészt valójában nem vesztünk azzal, hogy csak a fenti σ-aalgebra halmazaira definiáltuk a valószínűséget. Ugyanis, amikor egy halmaz valószínűségét kérdezzük, akkor azt a halmazt valamilyen definicióval le kell írni. Viszont az összes definiálható halmaz része a fenti σ-algebrának.

Megjegyezzük, hogy a fent tárgyalt probléma általános. Mihelyt nem véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok külöböző értéket felvevő valószínűségi változóval dolgozunk, hasonló kérdések merülnek fel. Így például akkor, ha az egységintervallumon olyan valószínűségi mértéket akarunk definiálni, mely szerint egy intervallum mértéke megegyezik ennek az intervallumnak a hosszával. Vagy az egységnégyzeten olyan mértéket, melyben egy téglalap mértéke megegyezik annak a területével. (Lebesgue mérték definiciója.)

A függetlenségről szóló legfontosabb fogalmak és eredmények.

Előzetes megjegyzés: A szövegben AB-vel és nem $A \cap B$-vel jelölöm a metszetet $A + B$-vel és nem $A \cup B$-vel az uniót. Mint értesültem róla, az az előadáson az $A \cap B$ illetve $A \cup B$ jelölést használják. Mivel az irodalomban mind a két jelölés gyakran előfordul, helyes, ha mind a két jelölésmódhoz hozzászoknak.

Mint arról szó volt eseményeknek egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező (mérhető) halmazait nevezzük. Egy A és B esemény (halmaz) akkor és csak akkor független, ha $P(AB) = P)A)P(B)$. Általánosabban:

Események függetlenségének definiciója: *Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor (telje-*

sen) függetlenek, ha az $\{1,\dots,n\}$ indexhalmaz minden $\{j_1,\dots,j_k\}\subset\{1,\dots,n\}$ részhalmazára

$$P(A_{j_1}\cdots A_{j_k})=P(A_{j_1})\cdots P(A_{j_k}).$$

Események végtelen $A_1,A_2,\dots$ sorozata akkor és csak akkor független, ha tetszőleges pozitív n egész számra az $A_1,\dots,A_n$ események függetlenek.

Néhány fontos tény a függetlenséggel kapcsolatban:

1. Adva egy A esemény vezessük be az A^ε jelölést, ahol $\varepsilon=\pm1$, $\varepsilon=1$ estében $A^1=A$, $\varepsilon=-1$ esetében $A^{-1}=\Omega\setminus A$ az A halmaz komplementere. (Gyakran használják az $\Omega\setminus A=\bar A$ jelölést is.) Ha $A_1,\dots,A_n$ független események, akkor az $A_1^{\varepsilon_1},\dots,A_n^{\varepsilon_n}$ események az $\varepsilon_k=\pm1$, $k=1,\dots,n$ tetszőleges értékei esetén függetlenek.
2. Ha $A_1,A_2,A_3,\dots,A_n$ független események, akkor $A_1+A_2,A_3,\dots,A_n$ is független események.
3. Igaz az előző állítás alábbi általánosítása is: Legyenek A_1, ... , A_k, A_{k+1}, ... , A_n független események. Ha a B esemény egy az A_1, ... , A_k események segítségével metszettel, unióval és komplementerképzéssel kifejezhető halmaz, akkor a B, A_{k+1}, ... , A_n halmazok függetlenek egymástól. Pontosabban megfogalmazva: Definiáljuk tetszőleges $j_s=0$ vagy $j_s=1$, $s=1,\dots,k$ számokra a

$$B(j_1,\dots,j_k)=A^{-1^{j_1}}\cdots A^{-1^{j_k}}$$

   halmazt. (Ugyanazt a jelölést használjuk mint az 1. megjegyzésben.) Ha $B=\bigcup\limits_{(j_1,\dots,j_k)\in\mathbf{C}} B(j_1,\dots,j_k)$, ahol $\mathbf{C}$ az összes lehetséges k hosszúságú 0—1 sorozatból álló halmaz tetszőleges részhalmaza, akkor a B, A_{k+1}, ... , A_n események függetlenek.
4. Lássunk példát arra, hogy például $k=3$ esetében egy A, B és C halmaz esetében a $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ feltétel teljesülése nem elegendő az A, B és C események függetlenségéhez. Legyen $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,4\}$, $C=\{2,3,4\}$, $P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=\dfrac{1}{3\sqrt3}$, $P(\{5\})=1-\dfrac{4}{3\sqrt3}$. Ekkor $ABC=\{2\}$, $P(ABC)=\dfrac{1}{3\sqrt3}$, $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{\sqrt3}$, $P(AB)=P(\{2,3\})=\dfrac{2}{3\sqrt3}$. Ezért $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$, de $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

Az 1. állítás bizonyításának vázlata: Belátjuk, hogy ha A és B független események, akkor az A és $\bar B$ események függetlenek. Ekkor $P(A\bar B)=P(A\setminus B)=P(A)-P(AB)$, mert $AB\subset A$. Innen $P(A\bar B)=P(A)-P(A)P(B)$, mert A és B független események. Ezért $P(A\bar B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\bar B)$. Innen, illetve a függetlenség definiciójából következik, hogy ha $A_1,\dots A_n$ események függetlenek, $1\le j\le n$, akkor az $A_1,\dots,A_{j-1}\bar A_j,A_{j+1},\dots,A_n$ események is függetlenek. Valóban, tekintsünk valamilyen $A_{j_1},\dots\ A_{j_s}$ eseményeket, melyekre teljesül a $\{j_1,\dots,j_s\}\subset\{1,\dots,n\}\setminus\{j\}$ feltétel, és vezessük be az $A=A_{j_1}\cdots A_{j_s}$, $B=A_j$ eseményeket. Ekkor $P(AB)=P(A)P(B)$, mert a függetlenség definiciója alapján mind a két oldal a $P(A_j)P(A_{j_1})\cdots P(A_{j_s})$ kifejezéssel egyenlő. Ezért az elóbbiek alapján, $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$. Továbbá,

$$P(A_{j_1}\cdots A_{j_s}) = P(A_{j_1})\cdots P(A_{j_s}),$$

ezért

$$P(\bar{A}A_{j_1}\cdots A_{j_s}) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(\bar{A}_j)P(A_{j_1})\cdots P(A_{j_s}),$$

és az $A_1,\dots,A_{j-1}\bar{A}_j,A_{j+1},\dots,A_n$ események is függetlenek. Innen indukcióval következik, hogy az $A_1,\dots,A_n$ események közül valamely $A_{j_1},\dots\ A_{j_k}$ eseményeket kicserélve ezek komplementerével az így kapott események függetlenek maradnak.

Ugyancsak fontos fogalom valószínűségi változók függetlensége. Idézzük fel először a valószínűségi változó fogalmát. Legyen adva egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy $\xi=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, valószínűségi változó ezen a téren, ha $\xi=\xi(\omega)$ ezen a téren definiált (mérhető) valós értékű függvény. (Az, hogy a ξ függvény mérhető azt jelenti, hogy a számegyenes tetszőleges Borel mérhető B halmazára az $\{\omega\colon \xi(\omega)\in B\}$ halmaz mérhető halmaza az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ térnek, azaz eleme az $\mathcal{A}$ σ-algebrának. Ez technikai jellegű feltétel. Bár a részletek kidolgozása bizonyos mértékelméleti ismereteket igényel, a mérhetőség követelése nem jelent igazi megszorítást. Ugyanis minden definiálható függvény, tehát olyan függvény mely gyakorlatban előfordul, mérhető.)

Valószínűségi változók függetlenségének definiciója: *A $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor (teljesen) függetlenek, ha a számegyenes tetszőleges Borel mérhető $B_1,\dots,B_n$ halmazaira*

$$P(\xi_1\in B_1,\xi_2\in B_2,\dots,\xi_n\in B_n) = P(\xi_1\in B_1)P(\xi_2\in B_2)\cdots P(\xi_n\in B_n).$$

Azt mondjuk, hogy valószínűségi változók, $\xi_1,\xi_2,\dots$ végtelen sorozata független, ha a $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók függetlenek tetszőleges $n=1,2,\dots$ számra.

Néhány fontos tény valószínűségi változók függetlenségével kapcsolatban:

Ahhoz, hogy független valószínűségi változókról beszélhessünk szükségünk van annak ellenőrzésére, hogy a tekintett valószínűségi változók valóban függetlenek-e. Ha a definiciót használjuk, akkor nehézséget okozhat az, hogy minden Borel mérhető B_k, $k=1,\dots,n$ halmazt tekintenünk kell. Be lehet látni, hogy valójában elég bizonyos speciális Borel mérhető halmazokat tekinteni, ha a függetlenséget akarjuk ellenőrizni.

1. Tétel. *A $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor (teljesen) függetlenek, ha tetszőleges $x_1,\dots,x_n$ valós számokra*

$$P(\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\dots,\xi_n<x_n) = P(\xi_1<x_1)P(\xi_2<x_2)\cdots P(\xi_n<x_n).$$

Ugyanezt a tényt kifejezhetjük az eloszlásfüggvények nyelvén is. Jelölje

$$F(x_1,\dots,x_n) = P(\xi_1<x_1,\dots,\xi_n<x_n), \quad -\infty<x_k<\infty,\ k=1,\dots,n$$

a ξ_1, …, ξ_n valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényét. A ξ_1, …, ξ_n valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha azok $F(x_1,\dots,x_n)$ együttes eloszlásfüggvénye $F(x_1,\dots,x_n)=F_1(x_1)\cdots F_n(x_n)$ alakú. Ebben az esetben $F_k(x)=P(\xi_k<x)$, $k=1,\dots,n$, a ξ_k valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a fenti faktorizációban.