A szeptember 26-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Először felidéztünk néhány fontos tényt valószínűségi változók függetlenségével kapcsolatban:

1. Tétel. *Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, akkor szorzatuk várható értéke megegyezik az egyes változók várható értékének szorzatával. Azaz, képletben kifejezve*

$$E\xi_1\xi_2\cdots\xi_n = E\xi_1\, E\xi_2\cdots E\xi_n$$

Valójában némi megszorítást kell tennünk a fenti tételben. Tegyük fel, hogy $E|\xi_s| < \infty$ minden $1 \le s \le n$ esetén. Ez a feltétel biztosítja, hogy nem lép fel konvergencia (értelmezési) probléma az 1. tételben.

2. Tétel. *Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $g_1(x), \dots, g_n(x)$ (mérhető) függvények, akkor az $\eta_1 = g(\xi_1), \dots, \eta_n = g(\xi_n)$ valószínűségi változók is függetlenek.*

Kissé általánosabban: Legyenek

$$\xi_1, \dots, \xi_{l_1}, \xi_{l_1+1} \dots, \xi_{l_1+l_2} \dots, \xi_{l_1+\dots+l_{k-1}+1}, \dots, \xi_{l_1+\dots+l_k}$$

független valószínűségi változók, ahol $l_1, \dots, l_k$ pozitív egész számok. Ha $g_s(x_1, \dots, x_{l_s})$, $1 \le s \le k$ (mérhető) az R^{l_s} l_s dimenziós Euklidesi téren értelmezett függvények, akkor az $\eta_s = g_s(\xi_{l_{s-1}+1}, \dots, \xi_{l_s})$, $1 \le s \le k$, ($l_0 = 0$) valószínűségi változók függetlenek.

Következmény: *Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és $g_1(x), \dots, g_n(x)$ (mérhető) függvények a számegyenesen, akkor*

$$Eg_1(\xi_1)\cdots g_n(\xi_n) = Eg_1(\xi_1)\cdots Eg_n(\xi_n).$$

Valóban, a 2. tétel eredménye alapján az $\eta_s = g(\xi_s)$, $1 \le s \le k$ valószínűségi változók függetlenek, és a 2. tételt alkalmazva az η_s, $1 \le s \le k$ valószínűségi változókra megkapjuk a Következmény állítását.

Adva egy A esemény (azaz halmaz) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, vezessük be ennek az A halmaznak $\chi_A = \chi_A(\omega)$ indikátor függvényét a

$$\chi_A = \chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in A \\ 0, & \text{ha } \omega \notin A \end{cases}$$

képlet segítségével.

Állítás: *Legyenek adva valamilyen $A_1, \dots, A_n$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor és csak akkor függetlenek, ha ezek $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}$ indikátor függvényei független valószínűségi változók.*

Tétel. *Legyen adva egy $F(x) = P(\xi < x)$ eloszásfüggvényű ξ valószínűségi változó, $g(x)$ egy valós értékű függvény. Ekkor a $g(\xi)$ valószínűségi változő $Eg(\xi)$ várható értéke kiszámítható az*

$$Eg(\xi) = \int g(x)F(\,dx) \quad = \int g(x)f(x)\,dx \quad \text{ha } \xi\text{-nek létezik } f(x) \text{ sűrűségfüggvénye.}$$

képlet segítségével. Ha a ξ valószínűségi változó diszkrét eloszlású, azaz létezik legfeljebb megszámlálható sok x_1, x_2, ... pont úgy, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\xi = x_k) = 1$, akkor

$$Eg(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)P(\xi = x_k).$$

Számoljuk ki a fenti képlet segítségével néhány fontos eloszlás momentumait. A standard normális eloszlás az az eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. E definició helyességéhez tudnuk kell, hogy

Tétel.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

Emlékeztetőül, ennek oka, ha $I = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx$, akkor

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy \\ &= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}re^{-r^2}\,dr\,d\varphi = \int_0^{\infty} re^{-r^2/2}\,dr = \left[e^{-r^2/2}\right] = 1. \end{aligned}$$

1. Lássuk be, hogy egy standard normális eloszlás ξ valószínűségi változó szórásnégyzete 1.

   Bizonyítás: $E\xi = 0$, mert ξ sűrűségfüggvénye páros. Ezenkívül parciális integrálással kapjuk $f(x) = x$ és $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-x^2/2}$ választással, hogy

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^2e^{-x^2/2}\,dx = \left[-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

   Házi feladat:

   Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $E\xi^{2k} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$.

Definicó. *Azt mondjuk, hogy egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, $\lambda > 0$, ha eloszlásfüggvénye, $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x < 0$. Ezzel ekvivalens jellemzés: Egy $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye, és az $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $f(x) = 0$, ha $x \le 0$ alakú.*

2. Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[x^2e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

   Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Foglalkozzunk azzal a kérdéssel, hogyan lehet kiszámolni valószínűségi vektorok függvényének az eloszlását. Különösen fontos számunkra az az eset, amikor a valószínűségi vektorok komponensei függetlenek, ezen belül az a speciális kérdés, amikor független valószínűségi változók összegének az eloszlás vagy sűrűségfüggvényét vizsgáljuk. Ez vezet a konvolució fogalmának a bevezetéséhez. Először vezessük be a legfontosabb fogalmakat és eredményeket. Általában nem a valószínűségi változókat, hanem azok eloszlását ismerjük. Ezért fontos az (esetleg többdimenziós) eloszlásfüggvények definiciójának megadása, illetve azok az eredmények, melyek leírják, hogy egy megadott függvény mikor tekinthető eloszlásfüggvénynek.

Először megbeszéljük az eloszlásfüggvény tulajdonságait. Adva egy ξ valószínűségi változó, akkor ennek eloszlása az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, függvény. Ez teljesíti az alábbi tulajdonságokat.

Ha $F(x)$ eloszlásfüggvény, akkor

(i) $F(x)$ monoton növekvő függvény

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$,

(iii) $F(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra balról folytonos, és létezik jobboldali határértéke (mert monoton növekvő függvény), azaz $\lim\limits_{t\to x-0} F(t) = F(x)$, és létezik a $\lim\limits_{t\to x+0} F(t)$ határérték is.

$\lim\limits_{t\to x-0}$-val azt jelöljük, hogy olyan t_n számsorozatot tekintünk, melyre egyrészt $t_n \to x$, másrészt $t_n \le x$ minden n indexre. Hasonlóan $\lim\limits_{t\to x+0}$-val azt jelöljük, hogy olyan t_n számsorozatot tekintünk, melyre egyrészt $t_n \to x$, másrészt $t_n \ge x$ minden n indexre.

Ha $f(x)$ sűrűségfüggvény, akkor $f(x) \ge 0$ minden x számra, és $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = 1$.

Valóban, ha $F(x)$ egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, akkor $F(x) = P(\xi < x) \le P(\xi < y) = F(y)$ az $x < y$ esetben, mert $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\} \subset \{\omega\colon \xi(\omega) < y\}$. Továbbá, $\lim\limits_{t\to x-0} F(t) = \lim\limits_{t\to x-0} P(\xi < t) = P(\xi < x) = F(x)$ a valószínűség (σ-additivitás miatt teljesülő) múlt gyakorlaton megbeszélt tulajdonsága miatt. (A jobboldali határérték létezik az eloszlásfüggvény monotonitása miatt.) Ugyancsak ezen tulajdonság miatt $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(\xi < x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} P(\xi < x) = 1$. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$,

Mivel egy $f(x)$ sűrűségfüggvény egy fenti tulajdonságokkal rendelkező eloszlásfüggvény deriváltja (amelyik azt a plusz feltételt is teljesíti, hogy előáll mint egy $f(\cdot)$ függvény integrálja, ezért mint azt nem nehéz belátni, egy sűrűségfüggvény teljesíti a fenti feltételeket.

Megjegyzés: Be lehet bizonyítani, hogy egy a fenti tulajdonságokkal rendelkező $F(x)$ illetve $f(x)$ függvényhez létezik olyan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és azon egy ξ valószínűségi változó, melynek ez az $F(x)$ függvény az eloszlásfüggvénye, illetve ez az $f(x)$ függvény a sűrűségfüggvénye.

Az eloszlásfüggvény azért rendkívül fontos fogalma a valószínűségszámításnak, mert általában nem tudjuk, hogy melyek azok a véletlen körülmények, melyek meghatározzák egy valószínűségi változó értékét, csak azt hogy milyen valószínűséggel vesz fel különböző értékeket. Ahhoz, hogy ezeket a valószínűségeket meg tudjuk határozni ismernünk kell az eloszlásfüggvényt. Ugyancsak fontos fogalom az eloszlásfüggvény többdimenziós változata, amely megadja több valószínűségi változó együttes eloszlását.

Többdimenziós eloszlásfüggvény definiciója. *Legyen adva k valós értékű $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ezek eloszlásfüggvénye az*

$$F(x_1, \dots, x_k) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k),$$

k változós függvény, ahol $-\infty < x_j < \infty$ minden $1 \le j \le k$ indexre.

Azt mondjuk, hogy egy $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(x_1, \dots, x_k)$ sűrűségfüggvénye, ha

$$F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \dots, u_k)\, du_1 \dots du_k$$

minden $-\infty < x_j < \infty$, $1 \le j \le k$ számra.

A valószínűségszámítás problémái arról szólnak, hogy ha adva van valószínűségi változók egy sorozata, melynek ismerjük az együttes eloszlását mondhatunk ezekről, ezek különböző függvényei milyen valószínűséggel jelennek meg. Részletesebb tárgyalás és bizonyítás nélkül megadjuk a többdimenziós eloszlásfüggvény tulajdonságait. Csak annyit jegyezünk meg, hogy a kissé bonyolultabb (iv) tulajdonság azt fejezi ki az eloszlásfüggvény segítségével, hogy annak valószínűsége, hogy olyan $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ valószínűségi változók, melyek eloszlása az $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ eloszlásfüggvény, nem negatív valószínűséggel esik egy $\mathbf{K}$ téglatestbe, azaz $P(a_j \le \xi_j < b_j,$ minden $1 \le j \le k$ indexre$) \ge 0$.

Tétel. *Az alábbi (i)—(iv) tulajdonságokkal rendelkező $F(x_1, \ldots, x_k)$ függvényhez létezik k valószínűségi változó, melyeknek ez az eloszlásfüggvénye, azaz az $F(u_1, \ldots, u_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvény, ha teljesíti a következő négy tulajdonságot.*

(i) $F(u_1, \ldots, u_k)$ *minden változójának balról folytonos függvénye.*

(ii) $$\lim_{\substack{u_j \to \infty \\ \text{minden } j=1,\ldots,k \text{ számra}}} F(u_1, \ldots, u_k) = 1.$$

(iii) $$\lim_{\substack{u_j \to -\infty \\ \text{valamely } 1 \le j \le k \text{ számrra}}} F(u_1, \ldots, u_k) = 0.$$

Végül definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K} = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_k, b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K}) = \mu_F(\mathbf{K}) = \sum_{\substack{u_j = \, a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\ldots,k}} (-1)^{\chi(u_1,\ldots,u_k)} F(u_1, \ldots, u_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(u_1, \ldots, u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1, \ldots, u_k$ sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K}) \ge 0$ *minden* $\mathbf{K}$ *téglatestre.*

Következmény. *Egy k változós $f(x_1, \ldots, x_k)$ akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ valószínűségi vektornak, ha teljesíti az $f(x_1, \ldots, x_k) \ge 0$ minden $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ pontban, és*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_k) \, dx_1 \ldots \, dx_k = 1.$$

Adva egy $F(x_1, \ldots, x_k)$ eloszlású $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ valószínűségi vektor, akkor annak valószínűsége, hogy ez a véletlen vektor beleesik egy $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^k$ (mérhető) halmazban

$$P\left((\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbf{B}\right) = \int_{\mathbf{B}} F(\,dx_1, \ldots, \,dx_k).$$

Ha az $F(x_1, \ldots, x_k)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(x_1, \ldots, x_k)$ sűrűségfüggvénye, akkor

$$P\left((\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbf{B}\right) = \int_{\mathbf{B}} f(x_1, \ldots, x_k) \, dx_1 \ldots \, dx_k.$$

Speciálisan, ha ξ és η két független valószínűségi változó $F(x)$ és $G(y)$ eloszlásfüggvénnyel, ($f(x)$ és $g(y)$ sűrűségfüggvénnyel) akkor a (ξ, η) vektornak az eloszlásfüggvénye $F(x)G(y)$, (sűrűségfüggvénye pedig $f(x)g(y)$). Ezért a fentiek alapján a $\xi + \eta$ összeg eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta < x) &= \int\int_{(u,v),u+v<x} F(\,du)G(\,dv) \quad \text{és ha létezik sűrűségfüggvény} \\ &= \int\int_{(u,v),u+v<x} f(u)g(v) \, du \, dv \quad \text{minden } x \in \mathbf{R} \text{ számra.} \end{aligned}$$

Ennek alapján meg tudjuk érteni, hogy független valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét hogyan lehet kiszámítani az eredeti valószínűségi változók sűrűségfüggvényei konvoluciójának a segítségével. Ha ξ és η két független valószínűségi változó $f\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor a $\xi+\eta$ összeg sűrűségfüggvénye $h(x)=\dfrac{d}{dx}P(\xi+\eta<x)$ a következő módon számolható ki:

$$
\begin{aligned}
h(x)&=\frac{d}{dx}P(\xi+\eta<x)=\frac{d}{dx}\int\int_{\{(u,v)\colon\ u+v<x\}} f(u)g(v)\,du\,dv\\
&=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar u)g(\bar v-\bar u)\,d\bar u\right]d\bar v=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du
\end{aligned}
$$

A fenti számolások első azonosságában egy integráltranszformációt alkalmaztunk $\bar v=u+v$, $\bar u=u$ helyettesítéssel (majd később $\bar u$ és $\bar v$ helyett ismét u és v változót írtunk.) Felhasználtuk, hogy e transzformáció során az $\{(u,v)\colon u+v<x\}$ tartomány a $\{(\bar u,\bar v)\colon \bar v<x,\ -\infty<\bar u<\infty\}$ tartományba megy át, és a fenti (lineáris) transzformáció Jakobiánja azonosan 1. Az utolsó azonosságban a $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} H(v)\,dv=H(x)$ azonosságot alkalmaztuk $H(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v-u)\,du$ választással.

3. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ha $x\ge 0$, és $f(x)=0$, ha $x>0$. Számítsuk ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét. Általánosabban, legyenek $\xi_1,\dots\xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda>0$ paraméterrel. Számítsuk ki $\xi_1+\cdots+\xi_m$ sűrűségfüggvényét.

   Ki kell számolnunk az $f*f(x)$ illetve $\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x)=0$, ha $x\le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y\le 0$ vagy $x-y\le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x\ge 0$ esetén lehet nulla, az $x\le 0$ esetben $f(y)f(x-y)>0$ minden y-ra nulla, és $x\ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y)>0$ integrandus csak $0\le y\le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x)=f*f(x)$ $x<0$-ra $f_2(x)=0$, és

$$
\begin{aligned}
f_2(x)=f*f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy\\
&=\int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy=\lambda^2 x e^{-\lambda x},\quad \text{ha } x\ge 0.
\end{aligned}
$$

   Hasonlóan, ha $f_m(x)=\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1+\cdots\xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x)=0$ minden $m\ge 1$ számra, ha $x<0$. Azt állítjuk, hogy $f_m(x)=\dfrac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1} * f(x) = f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$
\begin{aligned}
f_{m-1} * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y) f(x-y)\, dy = \int_0^x \lambda^{m-1} \frac{y^{m-2}}{(m-2)!} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda(x-y)}\, dy \\
&= \lambda^m e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\, dy = e^{-\lambda x} \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \text{ha } x \ge 0.
\end{aligned}
$$

Ki tudjuk számolni tetszőleges független *egész értékű* valószínűségi változók összegének az eloszlását az adott valószínűségi változók eloszlásának a segítségével. E számolás megfogalmazásánának érdekében vezették be diszkrét eloszlások konvoluciójának a fogalmát.

Diszkrét eloszlások konvoluciójának a definiciója. *Legyen* $\mathcal{P} = p(k)$ *és* $\mathcal{Q} = q(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, *két eloszlás az egész számokon, azaz teljesüljenek a* $p(k) \ge 0$, $q(k) \ge 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p(k) = 1$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} q(k) = 1$ *feltételek. Ekkor e két eloszlás konvoluciója a*

$$
\mathcal{P} * \mathcal{Q}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(j) q(k-j), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
$$

eloszlás.

Tétel. *Ha* ξ *és* η *két diszkrét egész értékeket felvevő független valószínűségi változó* $\mathcal{P}$ *és* $\mathcal{Q}$ *eloszlással akkor* $\xi + \eta$ *eloszlása a* $\mathcal{P} * \mathcal{Q}$ *eloszlás.*