A szeptember 5-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

A szeminárium fő célja az volt, hogy néhány feladat megtárgyalásával példát mutassunk arra, hogy a valószínűségi mezők "absztrakt fogalmának" felhasználása lehetővé teszi bizonyos feladatok egyszerű megoldását, heurisztikus érvelések egyszerű, precíz megfogalmazását. A későbbiekben is igyekszünk ilyen példákat vizsgálni.

1. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?
2. Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

Mind a két feladat megoldható formális számolással, azt felhasználva, hogy ismert sűrűségfüggvényű valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét ki tudjuk számítani konvolúció segítségével. Ugyanakkor egy jó valószínűségi modellben vizsgálva a problémákat egyszerűbb megoldást is tudunk adni. Tekintsük mind a két megoldást.

1. feladat a) megoldás: Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember ember mikor érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Miért? Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x, y) pont az egységnégyzet

$$A = \left\{(x, y)\colon -\frac{1}{2} \le y - x \le \frac{1}{2}\right\} \cap [0, 1] \times [0, 1]$$

részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1 - 2 \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

2. feladat a) megoldás: Ez a feladat is hasonló módon tárgyalható. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint valamely u szám megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x, y) pont a következő $A_1(u)$, $A_2(u)$, $A_3(u)$ és $A_4(u)$ halmazok $A_1(u) \cup A_2(u) \cup A_3(u) \cup A_4(u)$ uniójába esik: $A_1(u) = \{(x, y)\colon x + y < u\} \cap [0, 1] \times [0, 1]$, $A_2(u) = \{(x, y)\colon x + (1 - y) < u\} \cap [0, 1] \times [0, 1]$, $A_3(u) = \{(x, y)\colon 1 - x + y < u\} \cap [0, 1] \times [0, 1]$ és $A_4(u) = \{(x, y)\colon 1-x+1-y < u\} \cap [0, 1] \times [0, 1]$. Ha $u < \frac{1}{2}$, akkor ezek a halmazok diszjunktak, területük $\frac{u^2}{2}$, ezért $F(u) = 1 - 2u^2$, ha $u \le \frac{1}{2}$. Ha $\frac{1}{4} \le u \le \frac{1}{2}$, akkor az $A_1(u) \cup A_2(u) \cup A_3(u) \cup A_4(u)$ halmaz komplementere egy olyan négyzet, melynek átlója $(2-2u)$ hosszú. Ezért $F(u)=1-2(1-u)^2=4u-2u^2-1$, ha $\frac{1}{2}\le u\le 1$. Ha $u\ge 1$, akkor $F(u)=1$.

1. feladat második megoldása. Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j-ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac{1}{2}\le\xi_1-\xi-2\le\frac{1}{2}$ események valószínűsége érdekel. Az $F(u)=P(\xi_1-\xi_2<u)$ eloszás sűrűségf8ggvénye a $g(u)=f_1*f_2(u)$ konvolúció, ahol $f_1(u)=1$, ha $0\le u\le 1$, $f_1(u)=0$, különben, $f_2(u)=1$, ha $-1\le u\le 0$, $f_2(u)=0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_{-1/2}^{1/2}g(u)\,du$. (Emlékeztetőül, ha f_1 és f_2 két sűrűségfüggvény, akkor ezek konvoluciója f_1*f_2 a következő módon számolható ki.

$$f_1*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(u)f_2(x-u)\,dv=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-u)f_2(u)\,dv,\qquad -\infty<x<\infty.$$

Továbbá, ha ξ_1 és ξ_2 két független valószínűségi változó $f_1(\cdot)$ és $f_2(\cdot)$ sűrűségfüggvényekkel, akkor a $\xi_1+\xi_2$ összegnek is létezik sűrűségfüggvénye, és az az $f_1*f_2(\cdot)$ konvolució.)

Némi számolás adja, hogy $g(u)=1-u$, ha $0<u<1$ $g(u)=1+u$, ha $-1<u<0$. Innen $F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_{-1/2}^{1/2}(1-|u|)\,du=\dfrac{3}{4}$.

2. feladat második megoldása. Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy a j-ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1, és ξ_2 független valószínűségi változók $f(x)=2$, ha $0\le x\le\frac{1}{2}$, és $f(x)=0$ egyébként sűrúségfüggvénnyel. Minket a $\xi_1+\xi_2$ eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x)=f*f(x)$, ahonnan $g(x)=2-|2-4x|$, ha $0\le x\le 1$, $g(x)=0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt.

Házi feladat.

Legyen ξ_1 és ξ_2 független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ_1 és ξ_2 sűrűségfüggvénye $f(x)=1$, ha $0\le x\le 1$, és $f(x)=1$ egyébként. Számítsuk ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét.