A április 24-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Lásssuk be a következő állítást:
Legyenek $Z^{(j)} = \left(Z_1^{(j)}, \dots, Z_k^{(j)}\right)$, $1 \le j \le n$, véletlen k-dimenziós vektorok ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor a $Z^{(1)} + \cdots + Z^{(n)}$ összeg várható értéke megegyezik a $Z^{(j)}$ vektorok várható értékeinek az összegével, azaz

$$E\left(Z^{(1)} + \cdots + Z^{(n)}\right) = EZ^{(1)} + \cdots + EZ^{(n)}.$$

Ha a $Z^{(j)}$, $1 \le j \le n$, véletlen vektorok függetlenek, akkor a kovariancia mátrix is additív, azaz, ha a $Z^{(j)}$ mátrix kovariancia mátrixa a D_j mátrix, $1 \le j \le n$, akkor a $Z_{(1)} + \cdots + Z^{(n)}$ véletlen összeg kovariancia mátrixa a $D_1 + \cdots + D_n$ mátrix. Ha egy $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$, véletlen vektor várható értéke $M = (M_1, \dots, M_k)$, kovariancia mátrixa a D $k \times k$ méretű mátrix, a tetszőleges valós szám, akkor az $aZ = (aZ_1, \dots, aZ_k)$, véletlen vektor várható értéke aM, kovariancia mátrixa pedig az a^2D kovariancia mátrix. Legyen továbbá $x = (x_1, \dots, x_k$ tetszőleges k-dimenziós vektor. Ekkor $E(Z + x) = EZ + x$, a $Z + x$ vektor kovariancia mátrixa pedig megegyezik a Z vektor kovariancia mátrixával.
Megoldás: A feladatban kimondott állítások következnek az egy-dimenziós esetben bizonyított állításokból. Az egy-dimenziós várható érték additivitából következik, hogy $E\left(Z^{(1)} + \cdots + Z^{(n)}\right) = EZ^{(1)} + \cdots + EZ^{(n)}$. Ha a $Z^{(j)}$ vektorok függetlenek, akkor tetszőleges j és k indexre,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\left(\sum_{p=1}^n Z_j^{(p)}, \sum_{q=1}^n Z_k^{(q)}\right) &= E\left(\sum_{p=1}^n \left(Z_j^{(p)} - EZ_j^{(p)}\right) \sum_{q=1}^n \left(Z_k^{(q)} - EZ_k^{(q)}\right)\right) \\ &= E\left(\sum_{p=1}^n \left(Z_j^{(p)} - EZ_j^{(p)}\right)\left(Z_k^{(p)} - Z_k^{(p)}\right)\right) = \sum_{p=1}^n \operatorname{Cov}\left(Z^{(p)}, Z^{(q)}\right),\end{aligned}$$

mert $E\left(Z_j^{(p)} - EZ_j^{(p)}\right)\left(Z_k^{(q)} - Z_k^{(q)}\right) = E\left(Z_j^{(p)} - EZ_j^{(p)}\right) E\left(Z_k^{(q)} - Z_k^{(q)}\right) = 0$, ha $p \ne q$ a függetlenség miatt. Ez az azonosság pedig azt jelenti, hogy független véletlen vektorok kovariancia mátrixa additív.
Az, hogy $E(Z + x) = EZ + x$, $EaZ = aEZ$, $\operatorname{Cov}(Z_p + x, Z_q + y) = \operatorname{Cov}(Z_p, Z_q)$, $\operatorname{Cov}(aZ_p, aZ_q) = a^2 \operatorname{Cov}(Z_p, Z_q)$, tetszőleges $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$ vektorra és $1 \le p, q \le k$ indexekre következik az egydimenziós esetben már bizonyított állításokból. Ezek az azonosságok tartalmazzák a feladat korábban nem bizonyított állításait.
2. Mutassunk példát két korrelálatlan ξ és η valószínűségi változóra, melyek nem függetlenek.
Megoldás: Sok egyszerű példát adhatunk. Tekintsük például a következő példát: Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban, Ekkor a ξ és $\eta = \xi^2$ valószínűségi változók korrelálatlanok, de nem függetlenek. Valóban, $E\xi = 0$, $E\eta = E\xi^2 = \dfrac{1}{12}$, $E\xi\eta = E\xi^3 = 0$, $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = 0$. Másrészt

ξ és η nem függetlenek, sőt az η valószínűségi változó a ξ valószínűségi változó determinisztikus függvénye.

Megoldás: Egy lehetséges formális indoklása annak, hogy ξ és η nem független a következő: Legyen $0 < a < 1$ tetszőleges szám. Ekkor $\{\omega\colon \eta < a^2\} = \{\omega\colon |\xi| < a\}$. Ezért $P(\xi < a, \eta < a^2) = P(\xi < a)$, azaz $P(\xi < a, \eta < a^2) \neq P(\xi < a)P(\eta < a^2)$.

3. A $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ valószínűségi vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ egydimenziós valószínűségi változó normális eloszlású tetszőleges $a_1, \dots, a_k$ valós számokkal.

   Megoldás: Ha $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ normális eloszlású valószínűségi változó, $\varphi(t_1, \dots, t_k) = Ee^{it_1\xi_1 + \dots + t_k\xi_k} = e^{i(t,m) - tDt^*/2}$ karakterisztikus függvénnyel, akkor a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a

$$\psi(t) = \varphi(a_1t, \dots, a_kt) = Ee^{i(a_1t\xi_1 + \dots + a_kt\xi_k)} = e^{it(a,m) - aDa^*t^2/2}$$

   függvény, ahol $a = (a_1, \dots, a_k)$, $-\infty < t < \infty$, tetszőleges valós szám. Innen következik, hogy $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ normális eloszlású valószínűségi változó aDa^* szórásnégyzettel és (a,m) várható értékkel.

   Megfordítva, ha tetszőleges $a_1, \dots, a_k$ számokra a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ valószínűségi változó normális eloszlású, akkor $E\xi_j^2 < \infty$ minden $1 \le j \le k$ számra, és létezik a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektornak valamilyen $m = (m_1, \dots, m_k)$ várható értéke és $D = (d_{j,l})$, $1 \le j,l \le k$, $d_{j,l} = \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_l)$ kovariancia mátrixa. Ekkor a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ összeg várható értéke $\sum\limits_{j=1}^{k} a_jm_j = (a,m)$, szórásnégyzete aDa^*, $a = (a_1, \dots, a_k)$, kovarianciafüggvénye pedig $\psi_{a_1,\dots,a_k}(s) = e^{is(a,m) - aDa^*s^2/2}$. Innen következik, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye a $\varphi(t_1, \dots, t_k) = \psi_{t_1,\dots,t_k}(1) = e^{i(t,m) - tDt^*/2}$. Ezért $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ normális eloszlású valószínűségi változó.

4. Legyen $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ k-dimenziós, normális eloszlású valószínűségi változó $m = (m_1, \dots, m_k)$ várható értékkel és D kovariancia mátrix-szal, és legyen B valamely $k \times k$ méretű mátrix. Mutassuk meg, hogy az $\eta B = (\eta_1, \dots, \eta_k)B$ véletlen vektor k-dimenziós, normális eloszlású valószínűségi változó mB várható értékkel és B^*DB kovariancia mátrix-szal.

   Megoldás: Egy lehetséges bizonyítás: Az η véletlen vektor eloszlása megegyezik egy $\xi A + m = (\xi_1, \dots, \xi_k)A + (m_1, \dots, m_k)$ véletlen vektor eloszlásával, ahol ξ_j, $1 \le j \le k$, független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, és A olyan $k \times k$ méretű mátrix, melyre $D = A^*A$. Ezért ηB eloszlása megegyezik a $\xi AB + mB$ véletlen vektor eloszlásával. Ez viszont egy k dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke mB, kovariancia mátrixa pedig $(AB)^*AB = B^*A^*AB = B^*DB$.

5. Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, B pedig egy $k \times p$ méretű, (azaz nem feltétlenül négyzetes) mátrix. Ekkor az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p) = \xi B$ véletlen vektor p-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó.

   Megoldás: Írjuk fel az η véletlen vektor karakterisztikus függvényét, ha a ξ vektor karakterisztikus függvénye a $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_k) = e^{i(m,t)-tDt^*/2}$ alkalmas m k-dimenziós vektorral és D $k \times k$ méretű pozitív szemidefinit mátix. Ekkor tetszőleges $t = (t_1, \dots, t_p)$ vektorra

   $$Ee^{i(t,\eta)} = Ee^{i((t,\xi B)} = Ee^{i(tB^*,\xi)} = e^{i(tB^*,m)-tB^*DBt^*/2} = e^{i(t,\bar{m})-t\bar{D}t^*/2},$$

   $\bar{m} = mB$ és $\bar{D} = B^*DB$ választással. Innen következik a feladat állítása, mert ez azt jelenti, hogy η karakterisztikus függvénye egy normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. (Hogyan lehet látni, hogy $\bar{D} = B^*DB$ is pozitív szemidefinit mátrix?)

6. Definiáljuk a következő $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra $[0,1]$-en, és $\mathbf{P}$ a Lebesgue mérték. Definiáljuk a következő ξ és η valószínűségi változókat ezen a mezőn: $\xi(x) = \Phi^{-1}(x)$,

   $$\eta(x) = \begin{cases} \xi(1-x) & \text{ha } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \xi\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{ha } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

   Lássuk be, hogy ξ és η normális eloszlású valószínűségi változók, de a (ξ, η) vektor nem normális eloszlású valószínűségi vektor.

   Megoldás: A ξ és η valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Továbbá,

   $$P(\xi > x) = \lambda(\Phi(x), 1]) = 1 - \Phi(x)\ .$$

   Az, hogy (ξ, η) vektor nem normális eloszlású következik például a $P(\xi+\eta = 0) = \frac{1}{2}$ azonosságból. Miért?

7. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független a $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{j=1}^n \xi_j$ és $\sum\limits_{j=1}^n \xi_j^2$ összegek normalizáltjainak azaz az $\sqrt{\dfrac{12}{n}} \sum\limits_{j=1}^n \xi_j$ és $\sqrt{\dfrac{180}{n}} \sum\limits_{j=1}^n \left(\xi_j^2 - \dfrac{1}{12}\right)$ valószínűségi változóknak az együttes eloszlása a két-dimenziós standard normális eloszláshoz konvergál, ha $n \to \infty$.

   Megoldás: $E\xi = 0$, $E\xi^2 = \dfrac{1}{12}$, $\operatorname{Var}\xi = \dfrac{1}{12}$, $\operatorname{Var}\xi^2 = E\xi^4 - (E\xi^2)^2 = \dfrac{1}{80} - \dfrac{1}{144} = \dfrac{1}{180}$. Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi, \xi^2) = E\xi^3 - E\xi E\xi^2 = 0$. Ezért a $\left(\sqrt{12}\xi_j, \sqrt{180}\left(\xi_j^2 - \dfrac{1}{12}\right)\right)$,

$j = 1, 2, \ldots$, véletlen vektorok függetlenek, nulla várható értékkel és az identitás kovariancia mátrix-szal. Innen, és a több-dimenziós centrális határeloszlástételből következik a feladat állítása.

8. Legyen (ξ, η) normális eloszlású vektor $m = (m_1, m_2) = (E\xi, E\eta)$ várható értékkel és
$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,1}, & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1}, & \sigma_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\xi^2 - (E\xi)^2, & E\xi\eta - E\xi E\eta \\ E\xi\eta - E\xi E\eta, & E\eta^2 - (E\eta)^2 \end{pmatrix}$$
kovarianciamátrix-szal. Ekkor létezik a ξ valószínűségi változónak $\xi = a\eta + \zeta$ alakú előállítása alkalmas a konstanssal, és az η valószínűségi változótól független ζ normális eloszlású valószínűségi változóval. Ez azt jelenti, hogy ha (ξ, η) két-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az első koordináta kifejezhető mint a második kooordináta konstansszorosának és egy a második koordinátától független normális eloszlású valószínűségi változó összege. A kívánt a konstanst explicit módon megadhatjuk az $a = \dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}$ képlet segítségével.

Hogy általánosítható a fenti állítás abban az esetben, ha ξ és η vektorváltozók is lehetnek?

Megoldás: A $\zeta = \xi - \dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}}\eta$ valószínűségi változó független az η valószínűségi változótól. Ehhez a több-dimenziós normális eloszlás tulajdonságai alapján elég ellenőrizni, hogy $\mathrm{Cov}\,(\zeta, \eta) = 0$. Innen következik a feladat állítása.

Az az eset, amikor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p)$, és $(\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_1, \ldots, \eta_p)$ egy $s + p$ dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó hasonlóan tárgyalható. Lássuk be, hogy létezik olyan $\mathbf{A}$ mátrix, melyre η és $\xi - \eta\mathbf{A}$ függetlenek. Ennek érdekében lássuk be először, hogy létezik olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix melyre $\eta\mathbf{U} = (\bar\eta_1, \ldots, \bar\eta_p) = \bar\eta$ vektor koordinátái függetlenek. Ugyanis, ha az η véletlen vektor D kovarianciamátrixát $D = \mathbf{U}^*\Lambda\mathbf{U}$ alakban írjuk, ahol $\mathbf{U}$ unitér Λ pedig diagonális mátrix, akkor az $\bar\eta = \eta\mathbf{U}$ véletlen normális eloszlású vektor kovarianciamátrixa Λ, ahonnan következik, hogy az $\bar\eta$ mátrix koordinátái függetlenek. Legyen $\bar\xi_r = \xi_r - \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{E\xi_r\bar\eta_k}{E\bar\eta_k^2}\bar\eta_k$, $r = 1, \ldots, s$. Ezt mátrixjelöléssel írjuk $\bar\xi = \xi - \bar\eta\mathbf{B}$ formában. Ekkor $(\xi - \bar\eta B, \bar\eta)$ olyan $p + s$ dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek első s és utolsó p koordinátája korrelálatlan, ezért független. Mivel a $\xi - \bar\eta\mathbf{B}$ és $\bar\eta$ vektorok függetlenek, ezért $\zeta = \xi - \bar\eta\mathbf{B} = \xi - \eta\mathbf{U}\mathbf{B}$ független az $\eta = \bar\eta\mathbf{U}^*$ vektortól.