**A április 3-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai**

1. Legyen $\eta_1$ és $\eta_2$ két független normális eloszlású vaószínűségi változó $m_1$ illetve $m_2$ várható értékkel, $\sigma_1^2$ és $\sigma_2^2$ szórásnégyzettel. Lássuk be, hogy $\eta_1+\eta_2$ $m_1+m_2$ várható értékú és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

Idézzük fel, hogy ha $\xi$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $\sigma\xi+m$ $m$ várható értékű és $\sigma^2$ szórásnégyztű normális eloszlású valószínűségi változó. Egy $\xi$ valószínűségi változó akkor normális eloszlású $m$ várható értékkel és $\sigma^2$ szórásnégyzettel, ha sűrűségfüggvénye a $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$ függvény.

A feladat megoldása előtt érdemes megjegyezni azt is, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-A)^2/B}\,dx=\sqrt{B\pi}.$$

Ezt láthatjuk például az $y=\sqrt{2}\dfrac{x-A}{\sqrt{B}}$ helyettesítéssel, és abból a tényből, hogy a $\varphi(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$ függvény sűrűségfüggvény. Ez az észrevétel azért hasznos, mert ez lehetővé teszi, hogy amennyiben olyan integrált kell kiszámolni, melyben az integrandus exponensében egy kvadratikus alak szerepel, akkor az inegrandusban szereplő kifejezést teljes négyzetté alakítva ki tudjuk számolni az integrált. Ez a gondolata a jelen feladat megoldásának is.

*Megoldás:* Az $\eta_1+\eta_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-(u-m_1)^2/2\sigma_1^2}e^{-(x-u-m_2)^2/2\sigma_2^2}\,du\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\Biggl\{-u^2\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}\right)+u\left(\frac{m_1}{\sigma_1^2}+\frac{x-m_2}{\sigma_2^2}\right)\\
&\qquad\qquad-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\Biggr\}\,du\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\Biggl\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(u-\frac{m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\\
&\qquad\qquad+\frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\Biggr\}\,du\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left\{\frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left\{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}.
\end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy a fenti számolásban megjelenő egyszerűsítések megjelenésének mélyebb oka van. Ha tudjuk, hogy a vizsgált integrál értéke olyan alakú, melyben konstansszor egy kvadratikus alak szerepel, akkor mivel a konvolució eredménye egy sűrűségfüggvény, ezért a végeredmény szükségszerűen normális sűrűségfüggvény. Továbbá, tudjuk, hogy a sűrűségfüggvény egy olyan valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, amelyik várható értéke $m_1 + m_2$ szórásnégyzete pedig $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

2. Legyen $\xi$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen $\xi$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, és legyen $t$ valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.
*Megoldás:*

$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tu-u^2/2-t^2/2+t^2/2}\, du$$
$$= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-u)^2/2}\, du = e^{t^2/2}.$$

3. Legyenek $\xi$ és $\eta$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó.
*Megoldás:* $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$, ha $x \geq 0$. Írjuk fel $\xi^2$ sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A $\xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$, ha $x \geq 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = g * g(x) = \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2}\, du$$
$$= e^{-x/2} \int_0^1 \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\, dv = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \quad \text{ha } x \geq 0,$$

és $f(x) = 0$, ha $x \leq 0$.
*Megjegyzés:* Az $x$ paramétertől nem függő $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\, dv$ integrál értékét meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény, ezért integrálja a számegyenesen eggyel egyenlő. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Hogyan? Vagyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (v - \frac{1}{2})^2}}.$$

4. Legyen $\xi$ és $\eta$ két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\dfrac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

A megoldás kidolgozása előtt tegyünk először egy általános megjegyzést. Ha adva van két valószínűségi változó $\xi$ és $\eta$, melyek (együttes) sűrűségfüggvénye egy ismert $f(u,v)$ sűrűségfüggvény, akkor az $\dfrac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlásfüggvényét a következő módon számolhatjuk ki: Vezessük be a $g(u,v)=g_x(u,v)$ függvényt, mely a síkon az $\left\{(u,v)\colon \dfrac{v}{u}<x\right\}$ halmaz indikátorfüggvénye, azaz $g(u,v)=1$, ha $\dfrac{v}{u}<x$, és $g(u,v)=0$, ha $\dfrac{v}{u}\ge x$. Ekkor $P\left(\dfrac{\eta}{\xi}<x\right)=Eg(\xi,\eta)=\int\int g(u,v)f(u,v)\,du\,dv=\int\int_{\{(u,v)\colon\ \frac{v}{u}<x\}} f(u,v)\,du\,dv$. Látni fogjuk, hogy az ebben a feladatban vizsgálandó integrál viszonylag egyszerű, könnyebben kezelhető.

*Megoldás.* A feladatben vizsgálandó hányados eloszlásfüggvénye

$$
\begin{aligned}
F(x)=P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=\iint_{v<xu}\frac{1}{2\pi}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv\\
&=2\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\arctan x}\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan x}d\varphi=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x.
\end{aligned}
$$

Ebben a számolásban a felírt integrált átírtuk $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$ transzformációval polárkoordinátarendszerben. E számolás során az integrandusban megjelenik az $r$ Jacobian mint szorzó faktor. Ezután azt vegyük észre, hogy a belső $r$ változó szerinti integrál $\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr=\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty=1$.

Kiszámoltuk a keresett valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. E valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az eloszlásfüggvény deriváltja, azaz az $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ függvény.

*Második megoldás.* A $(\xi,\eta)$ vektor sűrűségfüggvénye $\dfrac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen következik, hogy annak valószínűsége, hogy a $(\xi,\eta)$ vektor egy origóból kiinduló $\alpha$ szögű szögtartományba esik, $\dfrac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=P\left((\xi,\eta)\in\left[-\frac{\pi}{2},\arctan x\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\arctan x+\pi\right)\text{ szögtartományban}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}2\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x.
\end{aligned}
$$

5. Legyen $\xi$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumban, azaz legyen $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x)=1$, ha $0\le x\le 1$, $f(x)=0$ egyébként. Számítsuk ki a $\xi^2$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

   *Első megoldás:* $\operatorname{Var}\xi^2=E\left(\left(\xi^2\right)^2\right)-\left(E\xi^2\right)^2=E\xi^4-\left(E\xi^2\right)^2=\int x^4f(x)\,dx-\left(\int x^2f(x)\,dx\right)^2$, ahol $f(x)=1$, ha $0\le x\le 1$, $f(x)=0$ egyébként, azaz $f(x)$ a $\xi$

valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Innen $E\xi^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \dfrac{1}{3}$, és $\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^4\,dx - \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)^2 = \dfrac{1}{5} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{45}$.

*Második megoldás:* Számítsuk ki először a $\xi^2$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét. A $\xi^2$ valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = P(0 \le \xi \le \sqrt{x}) = \sqrt{x}, \quad \text{ha } 0 \le x \le 1,$$

$F(x) = 0$, ha $\xi < 0$, $F(x) = 1$, ha $x > 1$. Innen a $\xi^2$ valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Ezért

$$E\xi^2 = \int_0^1 x \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

és

$$\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx - \left(\int_0^1 x \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}.$$

6. Tegyük fel, hogy a következő játékot játszhatjuk: Feldobnak egy szabályos pénzdarabot egymástól függetlenül egymás után. Amennyiben fej a dobás eredménye, akkor a feltett tét dupláját kapjuk, ha írás, akkor a tét $\frac{2}{3}$ részét elveszítjük, és csak $\frac{1}{3}$ részét őrizhetjük meg. Mivel ez a játék előnyös, ezért feltesszük minden játékban minden pénzünket. Lássuk be, hogy amennyiben $A$ volt a vagyonunk a játék kezdete előtt, és $Z_n$ jelöli vagyonunkat az $n$-ik játék után, akkor
   a) $EZ_n = A\left(\dfrac{7}{6}\right)^n$, azaz vagyonunk várható értéke exponenciálisan nő.
   b) $Z_n$ sztochasztikusan tart nullához, azaz ha sokáig játszunk akkor közel egy valószínűséggel majdnem minden pénzünket elveszítjük. (Valójában $Z_n$ egy valószínűséggel is tart nullához, csak ennek indoklásához szükséges az előadáson eddig nem tárgyalt nagy számok erős törvénye is.)
   c) Értsük meg, hogy ez a két állítás nem mond egymásnak ellent.

*Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$ valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a $j$-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = \dfrac{1}{3}$, ha a $j$-ik dobás eredménye írás. Ekkor $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független valószínűségi változók, $P(\xi_j = 2) = P\left(\xi_j = \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, és ezenkívül $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$. Ezért $E\xi_j = \dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{6}$, és $EZ_n = EA\xi_1\xi_2\cdots\xi_n = AE\xi_1E\xi_2\cdots E\xi_n = A\left(\dfrac{7}{6}\right)^n$. Ez a feladat a) állítása.

A $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ relációból következik, hogy $\dfrac{1}{n}\log Z_n = \dfrac{\log A}{n} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\log\xi_j$. Továbbá, $E\log\xi_j = \dfrac{1}{2}\left(\log 2 + \log\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$. Ezért a nagy számok (gyenge) törvénye szerint $\dfrac{1}{n}\log Z_n$ sztochasztikusan konvergál a negatív $-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$ számhoz. Innen tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra $P(Z_n > \varepsilon) = P\left(\dfrac{1}{n}\log Z_n > \dfrac{\log\varepsilon}{n}\right)$, és ez a valószínűség nullához tart, ha $n\to\infty$. Valóban, a nagy számok gyenge törvénye, és a $-\dfrac{1}{10} > -\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$ egyenlőtlenség miatt $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{1}{n}\log Z_n < -\dfrac{1}{10}\right) = 1$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log\varepsilon}{n} = 0$ innen következik a feladat b) állítása.

Az a) rész bizonyítása azon alapult, hogy $E\xi_j > 1$, a b) részé pedig azon, hogy $E\log\xi_j < 0$. Ez a két egyenlőtlenség teljesülhet egyszerre, mert a várható érték és a logaritmus egymással nem felcserélhető. Igaz az $Ee^\eta \ge e^{E\eta}$ egyenlőtlenség (ez a konvex függvényekre vonatkozó úgynevezett Jensen egyenlőtlenség speciális esete), ahonnan $\xi = \log\eta$ választással $E\xi \ge e^{\log E\xi}$, de egyenlőség nem írható a fenti egyenlőtlenség helyett. Jegyezzük meg, hogy hasonló, de egyszerűbben érthető példát mutat a feladat a) és b) állításának egyszerre való teljesülésére a következő modell. Olyan játékot játszunk, melyben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elveszítjük, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig megháromszorozzuk a pénzünket. Az egyes játékok egymástól függetlenek, és minden időpontban minden pénzünket feltesszük. Ekkor annak a valószínűsége, hogy az $n$-ik játék után minden pénzünket elveszítjük, $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami rendkívül gyorsan tart egyhez, és pénzünk várható értéke $3^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami exponenciálisan gyorsan nő az $n$ függvényében. Hasonló, csak kissé rejtettebb eset történik az általunk tárgyalt feladatban is. Tekintsük a feladatban tekintett játék nyereményét sok játék után. Azt állíthatjuk, hogy nagy $n$ indexre az $n$-ik játék után nagy valószínűséggel alig marad pénzünk. Viszont kis valószínűséggel nagyon sok pénzt nyerünk, és ezért nyereményünk várható értéke nagy. Ez az oka annak, hogy nemcsak a b), hanem az a) állítás is teljesül.

7. Tekintsük az előző feladatban tekintett játékot azzal a különbséggel, hogy a játék minden egyes fordulójában vagyonunk $u$-ad részét, $0 \le u \le 1$, tesszük fel tétként. Jelölje $Z_n(u)$ vagyonunkat a játék $n$-ik lépése után. Ekkor az $\dfrac{1}{n}\log Z_n(u)$ valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak egy $B(u)$ számhoz. Határozzuk meg a legjobb $\bar{u}$ számot, amelyikre $B(\bar{u}) = \sup\limits_{0\le u\le 1} B(u)$. Lássuk be, hogy $B(\bar{u}) > 0$.

   *Megoldás:* Vezessük be a $\xi_j = \xi_j(u)$, $j = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat, melyekre $\xi_j = 1 + u$, ha a $j$-ik dobás eredménye fej, és $\xi_j = \xi_j(u) = 1 - \dfrac{2u}{3}$, ha a $j$-ik dobás eredménye írás. Ekkor az $n$-ik lépésben a vagyonunk $Z_n = A\xi_1\cdots\xi_n$, a $\xi_j$, $j = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak, ezért $\dfrac{1}{n}\log Z_n = \dfrac{\log A}{n} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\log\xi_j$, és a nagy számok gyenge törvénye szerint az

$\frac{1}{n} \log Z_n$ valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak a $B(u) = E \log \xi_1 = \frac{1}{2}\left(\log(1+u) + \log\left(1 - \frac{2u}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\log(1+u)\left(1 - \frac{2u}{3}\right)$ számhoz. A $B(u)$ függvény a maximumát az $\bar{u} = \frac{1}{4}$ helyen veszi fel, és $B(\bar{u}) = \frac{1}{2}\log\frac{25}{24} > 1$.

8. Legyen $\xi$ és $\eta$ két független $\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki $\xi - \eta$ sűrűségfüggvényét.

   *Megoldás:* Írjuk fel először általánosan $\xi - \eta$ $h(x)$ sűrűségfüggvényét, ha $\xi$ $f(x)$ és $\eta$ $g(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkezik. Ekkor $\xi - \eta = \xi + (-\eta)$, $-\eta$ sűrűségfüggvénye $g^-(x) = g(-x)$, ezért $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye

$$h(x) = \int f(y)g^-(x-y)\,dy = \int f(y)g(y-x)\,dy.$$

   Esetünkben $f(x) = g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = g(x) = 0$, ha $x \leq 0$. Ezért

$$f(y)g(y-x) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(2y-x)} & \text{ha } y \geq 0, \text{ és } y \geq x \\ 0 \quad \text{ha } y < 0, \text{ vagy } y < x \end{cases}.$$

   Innen $x \geq 0$ esetében $h(x) = \int_x^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(2y-x)}\,dy = \frac{\lambda}{2}e^{-x}$, $x < 0$ esetében $h(x) = \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(2y-x)}\,dy = \frac{\lambda}{2}e^{x}$. E két eredményt úgyis összefoglalhatjuk, hogy $\xi - \eta$ $h(x)$ sűrűségfüggvénye $h(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.

   Jegyezzük meg, hogy közvetlenül egyszerűen lehet látni, hogy a $\xi - \eta$ valószínűségi változó olyan, hogy $P(\xi - \eta < -x) = P(\xi - \eta > x)$, ezért $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye páros függvény. Ezért nem meglepő, hogy bár más integrált kellett kiszámítanunk a $h(x)$ függvény kiszámolásánál, az $x > 0$ és $x < 0$ esetben, mégis teljesül a $h(x) = h(-x)$ azonosság.