A Valószínűségszámítás I. előadássorozat tizenkettedik előadása.
2001 április 24.

A több-dimenziós centrális határeloszlástétel

Lássunk előbb néhány problémát, melyek megmutatják milyen kérdéseket kívánunk vizsgálni.

a.) Tekintsünk egy dobókockát. Feldobjuk sokszor, felírjuk a dobások eredményét, és ennek alapján akarjuk eldönteni, hogy a dobókocka szabályos-e. Természetes azt várni, hogy a dobókocka akkor szabályos, ha mindegyik dobáseredmény a dobásszámok egyhatoda plusz egy kis eltérés. De mely eltéréseket tekinthetünk kicsinek? Ha csak azt nézzük, mennyi annak a valószínűsége annak, hogy például a hatos dobások számának eltérése a dobások számának egyhatodától kisebb mint egy adott szám, akkor a centrális határeloszlástétel pontos leírást ad erre a problémára. De ha a különböző dobáseredmények együttes viselkedésére vagyunk kiváncsiak, akkor új eredményre van szükségünk.

b.) Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a $\sum\limits_{j=1}^n \xi_j$ összeg normalizáltjának az eloszlására jó leírást ad a centrális határeloszlástétel. Hasonló állítást mondhatunk a $\sum\limits_{j=1}^n \xi_j^2$ összeg normalizáltjának az eloszlására. De tudunk-e hasonló eredményt adni a $\sum\limits_{j=1}^n \xi_j$ és $\sum\limits_{j=1}^n \xi_j^2$ összegek normalizáltjának az együttes eloszlására? Erre a kérdésre a több-dimenziós centrális határeloszlástétel ad pozitív választ.

Legyenek $\xi^{(j)}=\left(\xi_1^{(j)},\dots,\xi_k^{(j)}\right)$, $j=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású k-dimenziós valószínűségi változók, (véletlen vektorok), ahol rögzített j indexre semmilyen (függetlenség jellegű) feltételt nem teszünk fel az $\xi_1^{(j)}$, $\dots$, $\xi_k^{(j)}$ valószínűségi változók között. Tegyük fel továbbá, hogy $E{\xi_s^{(j)}}^2<\infty$ minden $1\le s\le k$ indexre. Tekintsük az $S_n=(S_{n,1},\dots,S_{n,k})=\sum\limits_{j=1}^n \xi^{(j)}=\left(\sum\limits_{j=1}^n \xi_1^{(j)},\dots,\sum\limits_{j=1}^n \xi_k^{(j)}\right)$, $n=1,2,\dots$, véletlen összegeket. Célunk annak bizonyítása, hogy az S_n véletlen vektorok alkalmas normalizáltjának létezik határeloszlása, és a határeloszlást pontosan le akarjuk írni. Be fogjuk látni, hogy ez lehetséges. A határeloszlástételben megjelenő határeloszlásokat fogjuk több-dimenziós normális eloszlásnak nevezni.

Annak érdekében, hogy az eredményt megfogalmazzuk először tisztázni kell, hogy mi az egy-dimenziós centrális határeloszlástétel normalizálásában szereplő várható érték és szórásnégyzet több-dimenziós megfelelője. Jegyezzük meg, hogy most és a továbbiakban is a több-dimenziós vektorokat mint sorvektorokat tekintjük. Mind a sor mind az oszlopvektor jelölés lehetséges, és az irodalomban nem egységes a jelölés. A fontos az, hogy következetes jelölést alkalmazzunk.

Több-dimenziós valószínűségi változó várható értékének és kovariancia mátrixának a definiciója. *Legyen $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$ k-dimenziós véletlen vektor, melynek minden koordinátája teljesíti az $EZ_j^2 < \infty$, $1 \le j \le k$, feltételt. E véletlen vektor várható értéke az $EZ = (EZ_1, \dots, EZ_k)$ k-dimenziós vektor, kovariancia mátrixa pedig az a $D = (d_{j,l})$, $1 \le j, l \le k$, $k \times k$ méretű mátrix, mely mátrix j-ik sorában és l-ik oszlopában lévő elem a $d_{j,l} = \mathrm{Cov}\,(Z_j, Z_l) = EZ_jZ_l - EZ_jEZ_l$ szám.*

Fogalmazzuk meg a vektorértékű valószínűségi változók várható értékének és kovariancia mátrixának néhány fontos tulajdonságát. Az alábbi tétel formájában megfogalmazott állítás bizonyítása a gyakorlaton tárgyalandó feladat lesz.

Tétel. *Legyenek $Z^{(j)} = \left(Z_1^{(j)}, \dots, Z_k^{(j)}\right)$, $1 \le j \le n$, véletlen k-dimenziós vektorok ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor a $Z^{(1)} + \cdots + Z^{(n)}$ összeg várható értéke megegyezik a $Z^{(j)}$ vektorok várható értékeinek az összegével, azaz*

$$E\left(Z^{(1)} + \cdots + Z^{(n)}\right) = EZ^{(1)} + \cdots + EZ^{(n)}.$$

Ha a $Z^{(j)}$, $1 \le j \le n$, véletlen vektorok függetlenek, akkor a kovariancia mátrix is additív, azaz, ha a $Z^{(j)}$ mátrix kovariancia mátrixa a D_j mátrix, $1 \le j \le n$, akkor a $Z_{(1)} + \cdots + Z^{(n)}$ véletlen összeg kovariancia mátrixa a $D_1 + \cdots + D_n$ mátrix. Ha egy $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$, véletlen vektor várható értéke $M = (M_1, \dots, M_k)$, kovariancia mátrixa a D $k \times k$ méretű mátrix, a tetszőleges valós szám, akkor az $aZ = (aZ_1, \dots, aZ_k)$, véletlen vektor várható értéke aM, kovariancia mátrixa pedig az a^2D kovariancia mátrix. Legyen továbbá $x = (x_1, \dots, x_k)$ tetszőleges k-dimenziós vektor. Ekkor $E(Z + x) = EZ + x$, a $Z + x$ vektor kovariancia mátrixa pedig megegyezik a Z vektor kovariancia mátrixával.

Feladat: Bizonyítsuk be a fent megfogalmazott tételt.

A következő eredmény célja annak jellemzése, hogy milyen mátrixok jelenhetnek meg, mint alkalmas véletlen vektor kovariancia mátrixa. Ennek az eredménynek az ismertetésében és bizonyításában fel kell használnunk a lineáris algebra néhány alapvető fogalmát és eredményét. Igyekszem az állításokat úgy leírni, hogy önmagukban érthetőek legyenek, Viszont egy kiegészítésben leírom a felhasznált eredmények ismertetését és bizonyítását.

Először idézzük fel a következő lineáris algebrai fogalmat.

Szimmetrikus és pozitív (szemi)definit mátrixok definiciója. *Legyen $D = (d_{j,l})$ egy $k \times k$ méretű mátrix. Azt mondjuk, hogy a D mátrix szimmetrikus, ha minden $1 \le j, l \le k$ indexre $d_{j,l} = d_{l,j}$. Pontosabban azt követeljük meg, (ha nemcsak valós, hanem általános komplex értékű elemekkel rendelkező mátrixokat is tekintünk, ami ebben az előadásban nem fog előfordulni), hogy $d_{j,l} = \bar{d}_{l,j}$, ahol $\bar{z}$ a z komplex szám konjugáltja, azaz, ha $z = a + ib$, akkor $\bar{z} = a - ib$. Egy $k \times k$ méretű szimmetrikus $D = (d_{j,l})$ mátrix pozitív (szemi)definit, ha minden $x = (x_1, \dots, x_k)$ k-dimenziós vektorra $xDx^* =$*

$\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{l=1}^{k} x_j d_{j,l} x_l \ge 0$. *(Ebben a formulában x^* jelöli az x vektor transzponáltját, azaz azt az oszlopvektort, melynek fölülről számíva l-ik eleme megegyezik az x vektor balról számított l-ik elemével. Ekkor xDx^* a szokásos vektorszorzást jelöli.*

Az eredmények és fogalmak jobb megértése érdekében érdemes megadni a fent leírt koordinátarendszerben leírt definiciók koordinátarendszertől független ,,absztrakt” definicióját is és megérteni a két definició kapcsolatát. Ennek leírását (a bizonyítások többségének elhagyásával) megadom a kiegészítésben. A következő eredményben megfogalmazom azt a fontos eredményt, mely megadja a kovariancia mátrixok jellemzését. A bizonyítás felhasznál bizonyos nem triviális lineáris algebrai eredményeket is.

Tétel a kovariancia mátrixok jellemzéséről. *Legyen $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$ egy k-dimenziós véletlen vektor. Ekkor a Z vektor kovariancia mátrixa szimmetrikus és pozitív szemidefinit mátrix. Megfordítva, tetszőleges D szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixhoz létezik olyan $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$ véletlen vektor, melynek ez a D mátrix a kovariancia mátrixa. Sőt igaz a következő tartalmasabb állítás is: Legyen $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ olyan véletlen vektor, melynek a kovariancia mátrixa az identitás mátrix, azaz $\operatorname{Var} Y_j = 1$, $1 \le j \le k$, $\operatorname{Cov}(Y_j, Y_l) = 0$, ha $1 \le j, l \le k$, és $j \ne l$. (Ez a helyzet például akkor, ha az Y_j, $1 \le j \le k$ valószínűségi változók függetlenek, és $\operatorname{Var} Y_j = 1$.) Ekkor létezik olyan $A = (a_{j,l})$ $k \times k$ méretű mátrix, melyre igaz, hogy a $Z = (Z_1, \dots, Z_k) = (Y_1, \dots, Y_k)A = \left(\sum\limits_{p=1}^{k} a_{1,p} Y_p, \dots, \sum\limits_{p=1}^{k} a_{k,p} Y_p \right)$ véletlen vektor kovariancia mátrixa a D mátrix.*

Megjegyzés: Ez az állítás annak a valószínűségi változókról szóló egyszerű eredménynek több-dimenziós megfelelője, mely szerint egy valószínűségi változó szórásnégyzete nem negatív szám. A nem negatív számoknak a pozitív szemidefinit mátrixok felelnek meg magasabb dimenzióban. A bizonyítás egy alább megfogalmazandó nem triviális állításon alapul. Ez annak az állításnak a több-dimenziós megfelelője, hogy pozitív számból, lehet négyzetgyököt vonni. Jegyezzük meg, hogy valós számok között is csak akkor egyértelmű a gyökvonás, ha csak a pozitív gyököt tekintjük. Ennek az állításnak érvényes a következő több-dimenziós általánosítása, melynek bizonyítását a Kiegészítésben fogom vázlatosan leírni.

Tétel a lineáris algebrából. *Legyen D pozitív szemidefinit mátrix. Ekkor létezik olyan A mátrix, melyre érvényes a $D = A^*A$ azonosság, ahol A^* az A mátrix transzponáltját jelöli. Sőt, azt is feltehetjük, hogy az A mátrix önadjungált és szemidefinit. Eme megszorítás esetén az $D = A^*A = AA$ egyenlet megoldása egyértelmű. (Egy $A = (a_{j,l})$ $k \times k$ méretű mátrix transzponáltja az $A^* = (a_{l,j})$, illetve az általános komplex számokat is tartalmazó mátrixok esetében az $A^* = (\bar{a}_{l,j})$ $k \times k$ méretű mátrix, ahol $\bar{z}$ a z komplex szám konjugáltja.)*

A tétel bizonyítása a lineáris algebráról kimondott tétel segítségével. Tekintsünk először egy $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$ egy k-dimenziós véletlen vektort és annak $D = (d_{j,l})$, $d_{j,l} = \operatorname{Cov}(Z_j, Z_l)$, $1 \le j, l \le k$, kovariancia mátrixát. Ekkor D szimmetrikus mátrix, mert $d_{j,l} = d_{l,j}$, azaz $\operatorname{Cov}(Z_j, Z_l) = \operatorname{Cov}(Z_l, Z_j)$. Másrészt tetszőleges $x = (x_1, \dots, x_k)$

k-dimenziós vektorra $\operatorname{Var}\left(\sum\limits_{j=1}^k x_jZ_j\right)\ge 0$. Ezenkívül

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^k x_jZ_j\right)&=\sum_{j=1}^k\sum_{l=1}^k E\left(x_jx_l(Z_jZ_l-EZ_jEZ_l)\right)=\sum_{j=1}^k\sum_{l=1}^k x_jx_l\operatorname{Cov}(Z_j,Z_l)\\&=\sum_{j=1}^k\sum_{l=1}^k x_jx_ld_{j,l}=xDx^*.\end{aligned}$$

Innen következik, hogy $xDx^*\ge 0$ tetszőleges $x=(x_1,\dots,x_k)$ k-dimenziós vektorra, azaz D szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix.

Megfordítva, legyen D pozitív szemidefinit mátrix, és $Y=(Y_1,\dots,Y_k)$ olyan véletlen vektor, melynek a kovariancia mátrixa az identitás mátrix, azaz $\operatorname{Var}Y_j=1$, $1\le j\le k$, $\operatorname{Cov}(Y_j,Y_l)=0$, ha $1\le j,l\le k$, és $j\neq l$. A kimondott lineáris algebrai eredmény szerint létezik olyan $A=(a_{j,l})$, $1\le j,l\le k$ $k\times k$ méretű mátrix, melyre $D=A^*A$. Azt állítom, hogy a $Z=(Z_1,\dots,Z_k)=YA$, azaz a $Z=(Z_1,\dots,Z_k)$, $Z_j=\sum\limits_{p=1}^k a_{p,j}Y_p$, $1\le j\le k$, véletlen vektor kovariancia mátrixa a D mátrix. Innen következik a feladat második állítása is. Viszont $\operatorname{Cov}(Z_j,Z_l)=\operatorname{Cov}\left(\sum\limits_{p=1}^k a_{p,j}Y_p,\sum\limits_{q=1}^k a_{q,l}Y_q\right)$, ezért $\operatorname{Cov}(Z_j,Z_l)=\sum\limits_{p=1}^k\sum\limits_{q=1}^k a_{p,j}a_{q,l}\operatorname{Cov}(Y_p,Y_q)$, ahonnan mivel $\operatorname{Cov}(Y_p,Y_q)=0$, ha $p\neq q$, és $\operatorname{Cov}(Y_p,Y_p)=1$, $\operatorname{Cov}(Z_j,Z_l)=\sum\limits_{p=1}^k a_{p,j}a_{p,l}=d_{j,l}$, ahol $d_{j,l}$ a $D=A^*A$ mátrix j-ik sorában és l-ik oszlopában szereplő konstans.

Ezután be tudjuk vezetni a több-dimenziós normális eloszlásfüggvények fogalmát, és meg tudjuk fogalmazni a több-dimenziós centrális határeloszlástételt.

Több-dimenziós normális eloszlások definiciója. *Definiáljuk először a több-dimenziós standard normális eloszlást. Azt mondjuk, hogy egy $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ véletlen vektor eloszlása a k-dimenziós standard normális eloszlás, ha a $\xi_1,\dots,\xi_k$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyik ξ_j valószínűségi változó, $1\le j\le k$, standard normális eloszlású. Ekvivalens megfogalmazásban azt mondhatjuk, hogy egy $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ véletlen vektor eloszlása a k-dimenziós standard normális eloszlás, ha e véletlen vektornak létezik sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1,\dots,u_k)=\dfrac{1}{(2\pi)^{k/2}}\exp\left\{-\dfrac12\sum\limits_{j=1}^k u_j^2\right\}$ függvény.*

Egy $(\eta_1,\dots,\eta_k)$ k dimenziós véletlen vektor k dimenziós normális eloszlású vektor nulla várható értékkel, ha e véletlen vektor eloszlása megegyezik valamely $(\bar\eta_1,\dots,\bar\eta_k)=(\xi_1,\dots,\xi_k)A$ k-dimenziós vektor eloszlásával, ahol A egy $k\times k$ méretű mátrix, továbbá $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ egy k-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor.

Egy $(\zeta_1,\dots,\zeta_k)$ véletlen vektor k-dimenziós normális eloszlású vektor, ha eloszlása megegyezik egy $(\eta_1,\dots,\eta_k)+(m_1,\dots,m_k)$ véletlen vektor eloszlásával, ahol $(\eta_1,\dots,\eta_k)$

egy k-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, melynek a várható értéke nulla, és $(m_1, \dots, m_k)$ k-dimenziós determinisztikus vektor.

Később meg fogjuk adni a több-dimenziós normális eloszlás más ekvivalens jellemzését. Először azonban megfogalmazunk egy a több-dimenziós centrális eloszlástétel kimondásához szükséges később bizonyítandó eredményt.

Tétel a több-dimenziós normális eloszlás tulajdonságairól. *Tekintsünk egy k-dimenziós $(\eta_1, \dots, \eta_k) = (\xi_1, \dots, \xi_k)A + (m_1, \dots, m_k)$ normális eloszlású valószínűségi változót, ahol A egy $k \times k$ méretű mátrix, $m = (m_1, \dots, m_k)$ k-dimenziós (véletlentől nem függő) vektor és $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ egy k-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor. Akkor $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ $m = (m_1, \dots, m_k)$ várható értékű és $D = A^*A$ kovariancia mátrixú véletlen vektor. Továbbá egy k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó eloszlását meghatározza annak m várható értéke és D kovariancia mátrixa.*

Jegyezzük meg, hogy rögzített D (szimmetrikus és pozitív szemidefinit) mátrixra az $A^*A = D$ egyenletnek nem egyértelmű a megoldása. Tekintsünk két különböző A és B mátrixot, melyre $A^*A = B^*B$. A fenti tétel szerint, ha tekintünk egy k-dimenziós standard normális eloszlású $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ vektort, illetve a segítségével definiált $(\xi_1, \dots, \xi_k)A$ és $(\xi_1, \dots, \xi_k)B$ véletlen vektorokat, akkor bár ez az utóbbi két véletlen vektor különböző, eloszlásuk megegyezik. Ugyanis mind a két (normális eloszlású) vektor nulla várható értékű és $A^*A = B^*B$ kovariancia mátrixú. Ez a tulajdonság erősen kihasználja azt, hogy normális eloszlású valószínűségi változókról van szó. Ennek további fontos következményei vannak, melyeket később tárgyalni fogunk.

A több-dimenziós normális eloszlás tulajdonságairól szóló valamint a kovariancia mátrixok jellemzéséről szóló tételekből következik, hogy bármely $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ k-dimenziós valószínűségi változó esetén létezik olyan k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek kovariancia mátrixa és várható értéke megegyezik ennek a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ valószínűségi változónak a kovariancia mátrixával és várható értékével. Továbbá ennek a k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változónak az eloszlását meghatározza a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ valószínűségi változó kovariancia mátrixa és várható értéke. Erre az észrevételre szükségünk van ahhoz, hogy lássuk: Az alább megfogalmazott több-dimenziós centrális határeloszlás értelmes állítás.

A több-dimenziós centrális határeloszlástétel. *Legyenek $\xi^{(j)} = \left(\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_k^{(j)}\right)$, $j = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású k-dimenziós valószínűségi változók, melyekre teljesül az $E{\xi_l^{(1)}}^2 < \infty$, $1 \le l \le k$ feltétel. Legyen a $\xi^{(1)} = \left(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_k^{(1)}\right)$ vektor várható értéke $E\xi^{(1)} = \left(E\xi_1^{(1)}, \dots, E\xi_k^{(1)}\right)$, kovariancia mátrixa pedig egy D $k \times k$ méretű mátrix. Definiáljuk az $S^{(n)} = \left(S_1^{(n)}, \dots, S_k^{(n)}\right) = \sum\limits_{j=1}^n \xi^{(j)} = \left(\sum\limits_{j=1}^n \xi_1^{(j)}, \dots, \sum\limits_{j=1}^n \xi_k^{(j)}\right)$ összegeket, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor minden $(x_1, \dots, x_k)$ k-dimenziós vektorra érvényes a*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(S_1^{(n)} - ES_1^{(n)}\right) < x_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\left(S_k^{(n)} - ES_k^{(n)}\right) < x_k\right) = \Phi_D(x_1, \dots, x_k)$$

azonosság, ahol $\Phi_D(x_1,\dots,x_k)$ a k-dimenziós nulla várható értékű D kovariancia mátrixú normális eloszlásfüggvény értéke az $(x_1,\dots,x_k)$ pontban.

Megjegyezzük, hogy az egydimenziós esethez hasonlóan, a több-dimenziós centrális határeloszlástételnek is létezik általánosítása független nem feltétlenül egyforma eloszlású véletlen vektorok normalizált összegeinek határeloszlására nagyon általános feltételek mellett. Ezzel a kérdéssel azonban itt nem foglalkozunk.

A több-dimenziós centrális határeloszlástétel bizonyítása hasonló a klasszikus egydimenziós esethez. Az ott bevezetett fogalmaknak és eredményeknek megadhatóak a több-dimenziós általánosításaik, és a megfelelő eredmények hasonlóan bizonyíthatóak. Ezért csak a fogalmakat és az eredményeket fogom ismertetni. Külön érdemes hangsúlyozni, hogy a vizsgálatok során bevezetjük a több-dimenziós karakterisztikus függvény fogalmát, és a több-dimenziós karakterisztikus függvények vizsgálata nagy segítséget jelent a több-dimenziós normális eloszlások viselkedésének megértésében is.

Több-dimenziós eloszlásfüggvények eloszlásban való konvergenciájának a definíciója. *Legyen $F_n(x_1,\dots,x_k)$, $n=1,2,\dots$, k-dimenziós eloszlásfüggvények sorozata. Azt mondjuk, hogy az $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy k-dimenziós $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvényhez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x_1,\dots,x_k)=F(x_1,\dots,x_k)$ az $F(\cdot)$ (határ)eloszlásfüggvény minden $(x_1,\dots,x_k)$ folytonossági pontjában.*

Tétel az eloszlásban való konvergencia jellemzéséről folytonos függvények segítségével. *$F_n(u_1,\dots,u_k)$, $n=1,2,\dots$ k-dimenziós eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u_1,\dots,u_k)$ k-dimenziós eloszlásfüggvényhez, ha minden a k-dimenziós téren értelmezett folytonos, korlátos $g(u_1,\dots,u_k)$ függvényre teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty}\int g(u_1,\dots,u_k)\,F_n(\,du_1,\dots,\,du_k)=\int g(u_1,\dots,u_k)\,F(\,du_1,\dots,\,du_k)$$

azonosság.

Megjegyzés: Mivel minden több-dimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvénye folytonos, (bár nem feltétlenül van sűrűségfüggvénye) ezért a több-dimenziós centrális határeloszlástétel azt mondja ki, hogy az ott tekintett normalizált összegek eloszlásban konvergálnak egy nulla várható értékű és megfelelő kovariancia mátrixú normális eloszláshoz. Jegyezzük meg, hogy a tekintett normalizált összegek várható értéke és kovarianciamátrixa megegyezik egy a határeloszlással rendelkező véletlen vektor várható értékével és kovariancia mátrixával.

Az egydimenziós esethez hasonlóan a fenti tétel és Weierstrass második approximációs tétele (pontosabban annak több-dimenziós általánosítása) segítségével eloszlásfüggvények konvergenciáját jól lehet vizsgálni a karakterisztikus függvények alább bevezetett több-dimenziós általánosításának a segítségével.

Több-dimenziós valószínűségi változók karakterisztikus függvényének a definíciója. *Legyen $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ k-dimenziós valószínűségi változó valamely $(\Omega,\mathcal{A},P)$*

valószínűségi mezőn, és jelölje $F(u_1,\dots,u_k)=P(\xi_1<u_1,\dots,\xi_k<u_k)$, $-\infty<u_j<\infty$, $1\le j\le k$, *a* $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ *véletlen vektor eloszlásfüggvényét. A* $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ *k-dimenziós ξ valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye a*

$$\varphi(t_1,\dots,t_k)=Ee^{i(t_1\xi_1+\cdots+t_k\xi_k)}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)}F(\,du_1,\dots,du_k),$$
$$-\infty<t_j<\infty,\quad 1\le j\le k,$$

függvény. Adva egy $F(u_1,\dots,u_k)$ k-dimenziós eloszlásfüggvény az F eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét is definiálni fogjuk mint egy F eloszlású $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ k-dimenziós valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. (Mivel a karakterisztikus függvényt a $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a segítségével ki lehet számolni, ezért jogunk van egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről beszélni.)

Tétel. *Legyen $F(x_1,\dots,x_k)$ és $G(x_1,\dots,x_k)$ két eloszlásfüggvéy, melyek karakterisztikus függvényei megegyeznek. Ekkor $F(x_1,\dots,x_k)=G(x_1,\dots,x_k)$ minden k-dimenziós $(x_1,\dots,x_k)$ vektorra.*

Megfogalmazzuk az eloszlásfüggvények és azok karakterisztikus függvényei konvergenciája közötti kapcsolatot leíró Alaptételnek nevezett állítás több-dimenziós változatát.

Az eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel több-dimenziós változata. *Legyen $F_n(u_1,\dots,u_k)$, $-\infty<u_j<\infty$, $1\le j\le k$, k-dimenziós eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)=\int e^{i(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)}F_n(\,du_1,\dots,\,du_k)$ karakterisztikus függvényekkel, $n=1,2,\dots$. Ha a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ határérték létezik minden $-\infty<t_j<\infty$, $1\le j\le k$, számra, és a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvény a k-dimenziós térben, melynek a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az $F_n(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak ehhez az $F_0(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha $F_n(u_1,\dots,u_k)$, $n=1,2,\dots$, eloszlásfüggvényeknek egy olyan sorozata, mely egy $F_0(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$, $n=1,2,\dots$, jelöli az $F_n(u_1,\dots,u_k)$, $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ pedig az $F_0(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, akkor $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ minden $-\infty<t_j<\infty$, $1\le j\le k$, számra. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.

Megfogalmazzuk a fenti eredmények néhány fontos következményét. Először jellemezzük a több-dimenziós normális eloszlások karakterisztikus függvényeit.

Tétel a több-dimenziós normális eloszású valószínűségi változók karakterisztikus függvényéről. *Legyen $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)=(\xi_1,\dots,\xi_k)A+(m_1,\dots,m_k)$ egy k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, ahol $m=(m_1,\dots,m_k)$ k-dimenziós (determinisztikus) vektor, $A=(a_{j,l})$, $1\le j,l\le k$, $k\times k$ méretű mátrix,* *továbbá* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ *k-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor. Ekkor az* $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ *véletlen vektor karakterisztikus függvénye a*

$$Ee^{i(t,\eta)} = Ee^{i(t_1\eta_1+\cdots+t_k\eta_k)} = e^{i(t,m)-tA^*At^*/2} = \exp\left\{ i\sum_{j=1}^k t_j m_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\sum_{l=1}^k d_{j,l}t_jt_l \right\}$$

függvény, ahol (x,y) *jelöli az* $x = (x_1, \dots, x_k)$ *és* $y = (y_1, \dots, y_k)$ *vektorok* $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^k x_jy_j$ *skalárszorzatát,* $t = (t_1, \dots, t_k)$*,* $d_{j,l}$ *az* A^*A *kovariancia mátrixának* j*-ik sorában, és* l*-ik oszlopában szereplő konstans. A* $D = A^*A$ *mátrix megegyezik az* $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ *véletlen vektor kovariancia mátrixával.*

Bizonyítás:

$$Ee^{i(t,\eta)} = Ee^{i(t,A\xi+m)} = e^{i(t,m)}Ee^{i(tA^*,\xi)} = e^{i(t,m)}e^{-tA^*At^*/2} = e^{i(t,m)-tA^*At^*/2},$$

mert, ha $tA^* = \bar t = (\bar t_1, \dots, \bar t_k)$, akkor $Ee^{i(tA^*,\xi)} = Ee^{i(\bar t_1\xi_1+\cdots+\bar t_k\xi_k)} = \prod\limits_{j=1}^k Ee^{i\bar t_j\xi_j} = \prod\limits_{j=1}^k e^{-\bar t_j^2/2} = e^{-(\bar t,\bar t)/2} = e^{-tA^*At^*/2}$.

Az η véletlen vektor $D = (d_{j,l})$ kovariancia mátrixában a j-ik sor l-ik eleme $d_{j,l} = \mathrm{Cov}\,(\eta_j, \eta_l) = \mathrm{Cov}\left(\sum\limits_{p=1}^k a_{p,j}\xi_p, \sum\limits_{q=1}^k a_{q,l}\xi_q\right) = \sum\limits_{p=1}^k a_{p,j}a_{p,l}E\xi_p^2 = \sum\limits_{p=1}^k a_{p,j}a_{p,l}$, és ez az A^*A mátrix j-ik sorában és l-ik oszlopában álló elem. Ezért az η véletlen vektor kovariancia mátrixa a $D = A^*A$ mátrix. Az nyílvánvaló, hogy az η véletlen vektor várható értéke m.

Az előző tételnek van néhány fontos következménye.

1. következmény. *Egy* k*-dimenziós normális eloszlást meghatároz várható érték vektora és kovariancia mátrixa.*

2. következmény. *Legyen* (ξ, η) *két-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor. Ha a* ξ *és* η *valószínűségi változók korrelálatlanok, azaz* $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = 0$*, akkor* ξ *és* η *független valószínűségi változó. Általánosabban, legyen* $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ *k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melyre igaz, hogy valamilyen* j*, indexre,* $1 \le j < k$*, az első* j *és utolsó* $k - j$ *koordináták korrelálatlanok, azaz* $\mathrm{Cov}\,(\xi_p, \xi_q) = 0$*, ha* $1 \le p \le j < q \le k$*. Ekkor a* $(\xi_1, \dots, \xi_j)$ *és* $\xi_{j+1}, \dots, \xi_k)$ *véletlen vektorok független* j *és* $k - j$*-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változók.*

3. következmény. *Egy* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ *k-dimenziós valószinűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású, ha karakterisztikus függvénye*

$$Ee^{i(t,\xi)} = Ee^{i(t_1\xi_1+\cdots+t_k\xi_k)} = e^{i(t,m)-tDt^*/2} = \exp\left\{ i\sum_{j=1}^k t_j m_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k\sum_{l=1}^k d_{j,l}t_jt_l \right\}$$

alakú függvény, ahol $m = (m_1, \dots, m_k)$ *k-dimenziós (valós koordinátákból álló) vektor,* $D = (d_{j,l})$, $1 \le j,l \le k$, $k \times k$ *méretű pozitív szemidefinit mátrix,* (x,y) *jelöli az* $x = (x_1, \dots, x_k)$ *és* $y = (y_1, \dots, y_k)$ $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j y_j$ *skalárszorzatát,* $t = (t_1, \dots, t_k)$, *tetszőleges k-dimenziós vektor. A normális eloszlású* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ *valószínűségi változó fenti jellemzésében az* m *vektor a* ξ *több-dimenziós valószínűségi változó várható értéke,* D *pedig a kovariancia mátrixa.*

Az első következmény következik abból, hogy egyrészt egy normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvényét fel lehet írni annak várható érték vektora és kovariancia mátrixa ismeretében, másrészt egy eloszlást meghatároz annak karakterisztikus függvénye.

A második következmény indoklása hasonló. Tekintsük az abban megfogalmazott általánosabb állítás bizonyítását, és vezessük be a következő jelöléseket. Jelölje $m = (E\xi_1, \dots, E\xi_k)$ a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor várható értékét, $D = (d_{p,q})$, $d_{p,q} = \mathrm{Cov}\,(\xi_p, \xi_q)$, $1 \le p,q \le k$, ennek a vektornak a kovariancia mátrixát. Legyen $m_1 = (E\xi_1, \dots, E\xi_j)$ a $(\xi_1, \dots, \xi_j)$ vektor várható értéke, $D_1 = (d_{p,q})$, $d_{p,q} = \mathrm{Cov}\,(\xi_p, \xi_q)$, $1 \le p,q \le j$, ennek a vektornak a kovariancia mátrixa, végül legyen $m_2 = (E\xi_{j+1}, \dots, E\xi_k)$ a $(\xi_{j+1}, \dots, \xi_k)$ vektor várható értéke, $D_2 = (d_{p,q})$, $d_{p,q} = \mathrm{Cov}\,(\xi_p, \xi_q)$, $j+1 \le p,q \le k$, ennek a vektornak a a kovariancia mátrixa. Ezenkívül tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$ k-dimenziós vektort, és legyen $\mathbf{t}_1 = (t_1, \dots, t_j)$, $\mathbf{t}_2 = (t_{j+1}, \dots, t_k)$.

Ekkor a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye a $\varphi(t_1, \dots, t_k) = e^{i(\mathbf{t},m) - \mathbf{t}D\mathbf{t}^*/2}$ függvény. Az exponensben szereplő kifejezés felírható mint $i(\mathbf{t}, m) - \dfrac{\mathbf{t}D\mathbf{t}^*}{2} = i(\mathbf{t}_1, m_1) - \dfrac{\mathbf{t}_1 D_1 \mathbf{t}_1^*}{2} + i(\mathbf{t}_2, m_2) - \dfrac{\mathbf{t}_2 D_2 \mathbf{t}_2^*}{2}$, mert $\mathrm{Cov}\,(\xi_p, \xi_q) = 0$, ha $1 \le p \le j < q \le k$ vagy $1 \le q \le j < p \le k$. Ezért $\varphi(t_1, \dots, t_k) = \varphi_1(t_1, \dots, t_j)\varphi_2(t_{j+1}, \dots, t_k)$, ahol $\varphi_1(t_1, \dots, t_j) = e^{i(\mathbf{t}_1, m_1) - \mathbf{t}_1 D_1 \mathbf{t}_1^*/2}$, a $(\xi_1, \dots, \xi_j)$, $\varphi_2(t_{j+1}, \dots, t_k) = e^{i(\mathbf{t}_2, m_2) - \mathbf{t}_2 D_2 \mathbf{t}_1^*/2}$ pedig a $(\xi_{j+1}, \dots, \xi_k)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Mivel a karakterisztikus függvény meghatározza az eloszlásfüggvényt ez azt jelenti, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor eloszlásfüggvénye megegyezik két olyan független j illetve $k-j$-változós véletlen vektor együttes eloszlásával, melyek közül az első véletlen vektor karakterisztikus függvénye $\varphi_1(t_1, \dots, t_j)$ a másodiké pedig $\varphi_2(t_{j+1}, \dots, t_k)$. Mivel $(\xi_1, \dots, \xi_j)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye $\varphi_1(t_1, \dots, t_j)$, a $(\xi_{j+1}, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye pedig $\varphi_2(t_{j+1}, \dots, t_k)$, innen következik a második következmény állítása.

A harmadik következmény azonnal következik a több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változók karakterisztikus függvényének jellemzését leíró tételből, abból a kimondott lineáris algebrai tételből, mely szerint minden pozitív szemidefinit D mátrix felírható $D = A^*A$ alakban, illetve abból a tényből, hogy egy A^*A alakú mátrix mindig pozitív szemidefinit. Ez utóbbi állítás ellenőrzéséhez vegyük észre, hogy tetszőleges $x = (x_1, \dots, x_k)$ vektorra $xA^*Ax^* = xA^*(xA^*)^* = (xA^*, xA^*) \ge 0$ és ezt az egyenlőtlenséget kellett megmutatni.

Az első következményből, illetve normális eloszlású valószínűségi változó kovarianca mátrixának korábban kiszámolt alakjából következik a korábban megfogalmazott tétel a több-dimenziós normális eloszlás tulajdonságairól. Annak érdekében, hogy lássuk fontos volt feltenni a második következményben, hogy normális eloszlású valószínűségi változókat vizsgálunk oldjuk meg a következő feladatot.

Feladat:

Mutassunk példát két korrelálatlan ξ és η valószínűségi változóra, melyek nem függetlenek.
Megoldás: Sok egyszerű példát adhatunk. Tekintsük például a következő példát: Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ intervallumban, Ekkor a ξ és $\eta=\xi^2$ valószínűségi változók korrelálatlanok, de nem függetlenek. Valóban, $E\xi=0$, $E\eta=E\xi^2=\dfrac{1}{12}$, $E\xi\eta=E\xi^3=0$, $\operatorname{Cov}(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=0$. Másrészt ξ és η nem függetlenek, sőt az η valószínűségi változó a ξ valószínűségi változó determinisztikus függvénye. Egy lehetséges formális indoklása annak, hogy ξ és η nem független a következő: Legyen $0<a<1$ tetszőleges szám. Ekkor $\{\omega\colon \eta<a^2\}=\{\omega\colon |\xi|<a\}$. Ezért $P(\xi<a,\eta<a^2)=P(\xi<a)$, azaz $P(\xi<a,\eta<a^2)\neq P(\xi<a)P(\eta<a^2)$.

Feladat:

A $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ valószínűségi vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ egydimenziós valószínűségi változó normális eloszlású tetszőleges $a_1,\dots,a_k$ valós számokkal.
Megoldás: Ha $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ normális eloszlású valószínűségi változó, $\varphi(t_1,\dots,t_k)=Ee^{it_1\xi_1+\cdots+t_k\xi_k}=e^{i(t,m)-tDt^*/2}$ karakterisztikus függvénnyel, akkor a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a

$$\psi(t)=\varphi(a_1t,\dots,a_kt)=Ee^{i(a_1t\xi_1+\cdots+a_kt\xi_k)}=e^{it(a,m)-aDa^*t^2/2}$$

függvény, ahol $a=(a_1,\dots,a_k)$, $-\infty<t<\infty$, tetszőleges valós szám. Innen következik, hogy $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ normális eloszlású valószínűségi változó aDa^* szórásnégyzettel és (a,m) várható értékkel.

Megfordítva, ha tetszőleges $a_1,\dots,a_k$ számokra a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ valószínűségi változó normális eloszlású, akkor $E\xi_j^2<\infty$ minden $1\le j\le k$ számra, és létezik a $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ véletlen vektornak valamilyen $m=(m_1,\dots,m_k)$ várható értéke és $D=(d_{j,l})$, $1\le j,l\le k$, $d_{j,l}=\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_l)$ kovariancia mátrixa. Ekkor a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ összeg várható értéke $\sum\limits_{j=1}^{k} a_jm_j=(a,m)$, szórásnégyzete aDa^*, $a=(a_1,\dots,a_k)$, kovarianciafüggvénye pedig $\psi_{a_1,\dots,a_k}(s)=e^{is(a,m)-aDa^*s^2/2}$. Innen következik, hogy a $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye a $\varphi(t_1,\dots,t_k)=$

$\psi_{t_1,\dots,t_k}(1) = e^{i(t,m)-tDt^*/2}$. Ezért $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ normális eloszlású valószínűségi változó.

Feladat:

Legyen $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)$ k-dimenziós, normális eloszlású valószínűségi változó $m=(m_1,\dots,m_k)$ várható értékkel és D kovariancia mátrix-szal, és legyen B valamely $k\times k$ méretű mátrix. Mutassuk meg, hogy az $\eta B=(\eta_1,\dots,\eta_k)B$ véletlen vektor k-dimenziós, normális eloszlású valószínűségi változó mB várható értékkel és B^*DB kovariancia mátrix-szal.

Megoldás: Egy lehetséges bizonyítás: Az η véletlen vektor eloszlása megegyezik egy $\xi A+m=(\xi_1,\dots,\xi_k)A+(m_1,\dots,m_k)$ véletlen vektor eloszlásával, ahol ξ_j, $1\le j\le k$, független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, és A olyan $k\times k$ méretű mátrix, melyre $D=A^*A$. Ezért ηB eloszlása megegyezik a $\xi AB+mB$ véletlen vektor eloszlásával. Ez viszont egy k dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke mB, kovariancia mátrixa pedig $(AB)^*AB=B^*A^*AB=B^*DB$.

Feladat:

Legyen $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, B pedig egy $k\times p$ méretű, (azaz nem feltétlenül négyzetes) mátrix. Ekkor az $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_p)=\xi B$ véletlen vektor p-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás: Írjuk fel az η véletlen vektor karakterisztikus függvényét, ha a ξ vektor karakterisztikus függvénye a $\varphi(t)=\varphi(t_1,\dots,t_k)=e^{i(m,t)-tDt^*/2}$ alkalmas m k-dimenziós vektorral és D $k\times k$ méretű pozitív szemidefinit mátix. Ekkor tetszőleges $t=(t_1,\dots,t_p)$ vektorra

$$Ee^{i(t,\eta)}=Ee^{i((t,\xi B)}=Ee^{i(tB^*,\xi)}=e^{i(tB^*,m)-tB^*DBt^*/2}=e^{i(t,\bar m)-t\bar Dt^*/2},$$

$\bar m=mB$ és $\bar D=B^*DB$ választással. Innen következik a feladat állítása, mert ez azt jelenti, hogy η karakterisztikus függvénye egy normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. (Hogyan lehet látni, hogy $\bar D=B^*DB$ is pozitív szemidefinit mátrix?)

Egy több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó koordinátái normális eloszlásúak. A következő feladatban példát mutatunk arra, hogy ennek az állításnak a megfordítása nem igaz.

Feladat:

Definiáljuk a következő $(\Omega,\mathcal{B},\mathbf{P})$ valószínűségi mezőt: $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra $[0,1]$-en, és $\mathbf{P}$ a Lebesgue mérték. Definiáljuk a következő ξ és η valószínűségi változókat ezen a mezőn: $\xi(x)=\Phi^{-1}(x)$,

$$\eta(x)=\begin{cases}\xi(1-x) & \text{ha } 0\le x<\frac12\\ \xi\left(x-\frac12\right) & \text{ha } \frac12\le x\le 1\end{cases}.$$

Lássuk be, hogy ξ és η normális eloszlású valószínűségi változók, de a (ξ, η) vektor nem normális eloszlású valószínűségi vektor.
Megoldás: A ξ és η valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Továbbá,

$$P(\xi > x) = \lambda(\Phi(x), 1]) = 1 - \Phi(x) \ .$$

Az, hogy (ξ, η) vektor nem normális eloszlású következik például a $P(\xi+\eta = 0) = \frac{1}{2}$ azonosságból. Miért?

Feladat:

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ és $\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^2$ összegek normalizáltjainak azaz az $\sqrt{\frac{12}{n}} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ és $\sqrt{\frac{180}{n}} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\xi_j^2 - \frac{1}{12}\right)$ valószínűségi változóknak az együttes eloszlása a két-dimenziós standard normális eloszláshoz konvergál, ha $n \to \infty$.
Megoldás: $E\xi = 0$, $E\xi^2 = \frac{1}{12}$, $\operatorname{Var} \xi = \frac{1}{12}$, $\operatorname{Var} \xi^2 = E\xi^4 - (E\xi^2)^2 = \frac{1}{80} - \frac{1}{144} = \frac{1}{180}$. Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi, \xi^2) = E\xi^3 - E\xi E\xi^2 = 0$. Ezért a $\left(\sqrt{12}\xi_j, \sqrt{180}\left(\xi_j^2 - \frac{1}{12}\right)\right)$, $j = 1, 2, \dots,$ véletlen vektorok függetlenek, nulla várható értékkel és az identitás kovariancia mátrix-szal. Innen, és a több-dimenziós centrális határeloszlástételből következik a feladat állítása.

Feladat:

Legyen (ξ, η) normális eloszlású vektor $m = (m_1, m_2) = (E\xi, E\eta)$ várható értékkel és

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,1}, & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1}, & \sigma_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\xi^2 - (E\xi)^2, & E\xi\eta - E\xi E\eta \\ E\xi\eta - E\xi E\eta, & E\eta^2 - (E\eta)^2 \end{pmatrix}$$

kovarianciamátrix-szal. Ekkor létezik a ξ valószínűségi változónak $\xi = a\eta + \zeta$ alakú előállítása alkalmas a konstanssal, és az η valószínűségi változótól független ζ normális eloszlású valószínűségi változóval. Ez azt jelenti, hogy ha (ξ, η) két-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az első koordináta kifejezhető mint a második kooordináta konstansszorosának és egy a második koordinátától független normális eloszlású valószínűségi változó összege. A kívánt a konstanst explicit módon megadhatjuk az $a = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}$ képlet segítségével.
Hogy általánosítható a fenti állítás abban az esetben, ha ξ és η vektorváltozók is lehetnek?
Megoldás: A $\zeta = \xi - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}}\eta$ valószínűségi változó független az η valószínűségi változótól. Ehhez a több-dimenziós normális eloszlás tulajdonságai alapján elég ellenőrizni, hogy $\operatorname{Cov}(\zeta, \eta) = 0$. Innen következik a feladat állítása.

Az az eset, amikor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$, és $(\xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_p)$ egy $s + p$ dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó hasonlóan tárgyalható. Lássuk be, hogy létezik olyan $\mathbf{A}$ mátrix, melyre η és $\xi - \eta\mathbf{A}$ függetlenek. Ennek érdekében lássuk be először, hogy létezik olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix melyre $\eta\mathbf{U} = (\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_p) = \bar\eta$ vektor koordinátái függetlenek. Ugyanis, ha az η véletlen vektor D kovarianciamátrixát $D = \mathbf{U}^*\Lambda\mathbf{U}$ alakban írjuk, ahol $\mathbf{U}$ unitér Λ pedig diagonális mátrix, akkor az $\bar\eta = \eta\mathbf{U}$ véletlen normális eloszlású vektor kovarianciamátrixa Λ, ahonnan következik, hogy az $\bar\eta$ mátrix koordinátái függetlenek. Legyen $\bar\xi_r = \xi_r - \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{E\xi_r\bar\eta_k}{E\bar\eta_k^2}\bar\eta_k$, $r = 1, \dots, s$. Ezt mátrixjelöléssel írjuk $\bar\xi = \xi - \bar\eta\mathbf{B}$ formában. Ekkor $(\xi - \bar\eta B, \bar\eta)$ olyan $p + s$ dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek első s és utolsó p koordinátája korrelálatlan, ezért független. Mivel a $\xi - \bar\eta\mathbf{B}$ és $\bar\eta$ vektorok függetlenek, ezért $\zeta = \xi - \bar\eta\mathbf{B} = \xi - \eta\mathbf{UB}$ független az $\eta = \bar\eta\mathbf{U}^*$ vektortól.

Megjegyzés: A valószínűségszámítás illetve statisztika finomabb kérdéseinek vizsgálatában bevezették a feltételes valószínűség és feltételes eloszlás fogalmát olyan esetekben is, amikor a feltétel nulla valószínűséggel következik be. Bizonyos vizsgálatokban fontos kiszámolni, hogy mi a feltételes eloszlása egy több-dimenziós normális vektor bizonyos koordinátáinak azon feltétel mellett, hogy a többi koordináta értékét rögzítjük. E feladat megoldásának kulcslépése a fent tárgyalt feladat megoldása.

A több-dimenziós centrális határeloszlástételt be lehet bizonyítani az egydimenziós valószínűségi centrális határeloszlástételhez hasonlóan az Alaptételnek nevezett állítás több-dimenziós változatának segítségével. Valójában van egyszerűbb megoldás is. Meg lehet mutatni, — szintén az Alaptétel több-dimenziós változata segítségével, — hogy a több-dimenziós határeloszlástételek következnek azok egy-dimenziós változatából. Az alábbiakban elmagyarázzuk ennek az okát.

Tétel. *Legyen $(S_{1,n}, \dots, S_{k,n})$, $n = 1, 2\dots$, k-dimenziós valószínűségi vektorok sorozata. Ezek a több-dimenziós valószínűségi változók akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban egy $(S_1, \dots, S_k)$ k-dimenziós véletlen vektorhoz $n \to \infty$ esetén, ha a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p S_{p,n}$, $n = 1, 2, \dots$, lineáris kombinációk bármely $a_1, \dots, a_k$ együtthatókkal konvergálnak eloszlásban a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p S_p$ valószínűségi változóhoz $n \to \infty$ esetén.*

Bizonyítás: Legyen $\varphi_n(t_1, \dots, t_k) = Ee^{i(t_1 S_{1,n} + \cdots + t_k S_{k,n})}$, $n = 1, 2\dots$, és $\varphi(t_1, \dots, t_k) = Ee^{i(t_1 S_1 + \cdots + t_k S_k)}$ az $(S_{1,n}, \dots, S_{k,n})$ illetve az $(S_1, \dots, S_k)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye. Hasonlóan definiáljuk a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p S_{p,n}$ valószínűségi változó $\psi_{a_1,\dots,a_k,n}(s) = Ee^{is(a_1 S_{1,n} + \cdots + a_k S_{k,n})}$ karakterisztikus függvényét, és legyen ezenkívül $\psi_{a_1,\dots,a_k}(s) = Ee^{is(a_1 S_1 + \cdots + a_k S_k)}$. Az $(S_{1,n}, \dots, S_{k,n})$, $n = 1, 2\dots$, valószínűségi vektorok sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban az $(S_1, \dots, S_k)$ k-dimenziós véletlen vektorhoz $n \to \infty$ esetén, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t_1, \dots, t_k) = \varphi(t_1, \dots, t_k)$ a k-dimenziós tér minden $(t_1, \dots, t_k)$ pontjára. Hasonlóan, a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p S_{p,n}$ lineáris kombinációk akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p S_p$ valószínűségi változókhoz $n \to \infty$ esetén, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_{a_1,\dots,a_k,n}(s) = \psi_{a_1,\dots,a_k}(s)$ a k-dimenziós tér minden $(a_1, \dots, a_k)$ pontjára és s valós számra. Mivel $\psi_{a_1,\dots,a_k,n}(s) = \varphi_n(sa_1, \dots, sa_k)$ és $\psi_{a_1,\dots,a_k}(s) = \varphi(sa_1, \dots, sa_k)$ innen következik a Tétel állítása.

Az előző tétel segítségével a következő módon bizonyíthatjuk be a több-dimenziós centrális határeloszlástételt.

A tétel kimondásában használt jelölést használva elég azt megmutatni, hogy tetszőleges $a_1, \dots, a_k$ számokra az $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{p=1}^{k} a_p \left(S_p^{(n)} - ES_p^{(n)} \right)$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p \left(S_p - ES_p \right)$ valószínűségi változóhoz, ahol $S = (S_1, \dots, S_k)$ egy k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó nulla várható értékkel és D kovariancia mátrix-szal. Ez az állítás viszont következik a következő észrevételekből: $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p \left(S_p^{(n)} - ES_p^{(n)} \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$, ahol $X_j = \sum\limits_{p=1}^{k} a_p \left(\xi_p^{(j)} - E\xi_p^{(j)} \right)$. Az X_j, $j = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak, $EX_j = 0$, és $\operatorname{Var} X_j = aDa^*$, ahol $a = (a_1, \dots, a_k)$. Hasonlóan, a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p \left(S_p - ES_p \right)$ (normális eloszlású) valószínűségi változó nulla várható értékű, és aDa^* szórásnégyzetű. Ezért az egydimenziós centrális határeloszlástételből következik a kívánt állítás.

Egy k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó eloszlása megegyezik egy $(\xi_1, \dots, \xi_k)A + (m_1, \dots, m_k)$ véletlen vektor eloszlásával, ahol A $k \times k$ méretű mátrix. Ha az A mátrix nem invertálható, akkor ez a véletlen vektor egy valószínűséggel egy legfeljebb $k-1$-dimenziós altér alkalmas eltoltján veszi fel az értékét, és ezért nincs sűrűségfüggvénye. A következő tételben megmutatjuk, hogy amennyiben az A mátrix invertálható, akkor ennek a normális valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, és explicit módon megadjuk azt.

Tétel a több-dimenziós normális eloszlásfüggvények alakjáról. *Legyen adva egy $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek $m = (m_1, \dots, m_k) = (E\eta_1, \dots, E\eta_k)$ a várható értéke és $D = (d_{j,l})$, $d_{j,l} = \operatorname{Cov}(\eta_j, \eta_l)$, $1 \le j, l \le k$, a kovariancia mátrixa. Az η k-dimenziós valószínűségi változónak akkor és csak akkor van sűrűségfüggvénye, ha a D kovariancia mátrix invertálható. Ha a D kovariancia mátrix invertálható, akkor az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye az a következő alakú:*

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \det D^{1/2}} \exp\left\{ -(x-m)D^{-1}(x-m)^*/2 \right\},$$

ahol $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$ k-dimenziós vektor.

Bizonyítás: Az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ véletlen vektor eloszlása megegyezik egy olyan $\bar\eta = (\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k) = (\xi_1, \dots, \xi_k)A + (m_1, \dots, m_k)$ véletlen vektornak az eloszlásával, amelyikre ξ_j, $1 \le j \le k$, független standard normális eloszlású valószínűségi változók, és $D = A^*A$. Jegyezzük meg, hogy a lineáris algebra standard eredményei szerint az A és A^* mátrixok egyszerre invertálhatóak vagy nem invertálhatóak, és a $D = A^*A$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha az A mátrix invertálható. Ezért, ha a D mátrix nem invertálható, akkor az η vektornak nincs sűrűségfüggvénye, ha pedig a D mátrix invertálható, akkor a következő módon számolhatunk:

Alkalmazva az $x = yA + m$ transzformációt $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$ és $\varphi(y) = \varphi(y_1, \dots, y_k) = \dfrac{1}{(2\pi)^{k/2}} e^{-(y_1^2 + \dots + y_k^2)/2}$ jelöléssel kapjuk, hogy tetszőleges mérhető $B \subset R^k$ halmazra

$$\begin{aligned} P(\bar\eta \in B) = P(\eta \in B) = P\left(\xi \in (B-m)A^{-1}\right) &= \int_{(y_1,\dots,y_k)\in(B-m)A^{-1}} \varphi(y)\,dy \\ &= \frac{1}{|\det A|} \int_{(x_1,\dots,x_k)\in B} \varphi\left((x-M)A^{-1}\right)\,dx \end{aligned}$$

alakú, ahol $|\det A|$ az $x = yA + M$ leképezés Jacobian-ja.

E formulából kiolvasható, hogy a vizsgált normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $\dfrac{1}{|\det A|}\varphi\left((x-m)A^{-1}\right)$ függvény. Annak érdekében, hogy bebizonyítsuk a tételt vegyük észre, hogy mivel $D = A^*A$, ezért $\det D = \det A^* \det A = \det A^2$, ezért $|\det A| = \det D^{1/2}$, és

$$\begin{aligned} \varphi\left((x-m)A^{-1}\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{((x-m)A^{-1}, (x-m)A^{-1})}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)A^{-1}\left(A^{-1}\right)^*(x-m)^*}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)(A^*A)^{-1}(x-m)^*}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)D^{-1}(x-m)^*}{2}\right\}, \end{aligned}$$

mert $A^{-1}\left(A^{-1}\right)^* = A^{-1}\left(A^*\right)^{-1} = \left(A^*A\right)^{-1}$. Innen következik a Tétel állítása.

Megjegyzés: Egy több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvényét megadó képletben a kovariancia mátrix szerepel, míg a sűrűségfüggvényét megadó képletben a kovariancia mátrix inverze. Az, hogy a karakterisztikus függvényben nem kellett invertálni az oka annak, hogy a karakterisztikus függvény segítségével könnyebb vizsgálni a normális eloszlásfüggvények tulajdonságait.