A Valószínűségszámítás I. előadássorozat tizenharmadik előadása.
2001 május 8.

A χ^2 eloszlásokról és χ^2 próbáról.

Tekintsük a több-dimenziós normális eloszlások bevezetőjében tekintett első problémát. Hogyan tudjuk ellenőrizni, hogy egy dobókocka szabályos-e?

Dobjuk fel a dobókockát n alkalommal, és legyen

$$(\nu(1),\dots,\nu(6)) = (\nu_n(1),\dots,\nu_n(6))$$

az $1,\dots,6$ dobáseredmények száma. Megmutatjuk a több-dimenziós centrális határeloszlás segítségével, hogy az $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{6}\left(\nu_n(j)-\frac{n}{6}\right)^2$ valószínűségi változóknak van határeloszlásuk, ha $n\to\infty$, (feltéve, hogy egy szabályos dobókocka egymástól független dobásainak az eredményeit tekintjük), és ezt a határeloszlást explicit módon meg tudjuk adni. Ez lehetőséget ad egy kocka szabályosságának ellenőrzésére. Ennek a feladatnak a következő természetes általánosítását fogjuk tekinteni:

Legyen adva k urna, és ellenőrizni akarjuk azt a feltételezést, mely szerint ha egy golyót véletlenül bedobunk ezen urnák valamelyikébe, akkor az p_j, $p_j>0$, valószínűséggel esik a j-ik urnába, $\sum\limits_{j=1}^{k}p_j=1$. Ennek a feltételezésnek az ellenőrzése érdekében dobjunk egymástól függetlenül n golyót ezekbe az urnákba, és jelölje $\nu_n(j)$ a j-ik urnába eső golyók számát. Be fogjuk látni, hogy feltételezésünk teljesülése esetén a $\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{(\nu_n(j)-np_j)^2}{np_j}$ valószínűségi változóknak létezik határeloszlása $n\to\infty$ esetén, és ez a határeloszlás az úgynevezett $k-1$ szabadságfokú χ^2 eloszlás. Megadjuk a χ^2 eloszlások definicióját.

A k szabadságfokú χ^2 eloszlás definiciója. *Legyen $\xi_1,\dots,\xi_k$ k darab független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor a $\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_j^2$ valószínűségi változó eloszlását nevezzük k szabadságfokú $\chi^2(k)$ eloszlásnak.*

Megjegyzés: Láttuk a 10. előadáson tárgyalt feladatok egyikében, hogy a 2 szabadságfokú $\chi^2(2)$ eloszlás a $\lambda=\frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlás, azaz az az eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye az $f(x)=\frac{1}{2}e^{-x/2}$, ha $x\ge 0$, és $f(x)=0$, ha $x<0$.

A fent említett határeloszlástétel segítségével a kocka szabályosságának ellenőrzéséhez hasonlóan ellenőrizni tudjuk feltételezésünk helyességét. A határeloszlástétel bizonyítása azon alapul, hogy egyrészt meg tudjuk adni a $\left\{\frac{\nu_n(j)-np_j}{\sqrt{np_j}},\ j=1,\dots,k\right\}$

véletlen vektorok határeloszlását a több-dimenziós centrális határeloszlástétel segítségével. Másrészt belátjuk, hogy ha $\left(\eta_1^{(n)},\dots,\eta_k^{(n)}\right)$ véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak egy $(\eta_1,\dots,\eta_k)$ véletlen vektorhoz $n\to\infty$ esetében, és $f(x_1,\dots,x_k)$ folytonos k-változós függvény, akkor az $f\left(\eta_1^{(n)},\dots,\eta_k^{(n)}\right)$, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak az $f(\eta_1,\dots,\eta_k)$ valószínűségi változóhoz. Ez lehetővé teszi a minket érdeklő statisztikák határeloszlásának megadását. Ezt a határeloszlást egyszerű, jól áttekinthető alakban akarjuk megadni. Ezt azért tudjuk megtenni, mert mint azt egy megoldásával együtt ismertetett feladatban megfogalmazom, ha $(\eta_1,\dots,\eta_k)$ k-dimenziós nulla várható értékű D kovarianciamátrixú normális eloszlású véletlen vektor valamilyen ismert D kovariancia mátrix-szal, akkor bizonyos alapvető lineáris algebrai eredmények felhasználásával egyszerű formában megadhatjuk a $\sum\limits_{j=1}^k \eta_j^2$ valószínűségi változó eloszlását.

Először megfogalmazzuk és bebizonyítjuk a fent említett állítást.

Lemma. *Legyen $(S_{1,n},\dots,S_{k,n})$, $n=1,2\dots$, k-dimenziós valószínűségi vektorok sorozata, amelyik eloszlásban konvergál egy $(S_1,\dots,S_k)$ k-dimenziós véletlen vektorhoz $n\to\infty$ esetén, és legyen $f(x_1,\dots,x_k)$ egy k-változós folytonos függvény. Ekkor a $T_n=f(S_{1,n},\dots,S_{k,n})$, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a $T=f(S_1,\dots,S_k)$ valószínűségi változóhoz $n\to\infty$ esetén.*

Bizonyítás: Használjuk a tételt az eloszlásban való konvergencia jellemzéséről folytonos függvények segítségével. Eszerint az $S_{1,n},\dots,S_{k,n}$ véletlen vektorok sorozatának eloszlásban való konvergenciát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy tetszőleges folytonos és korlátos $h(x_1,\dots,x_k)$ függvényre teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} Eh(S_{1,n},\dots,S_{k,n})=Eh(S_1,\dots,S_k)$ reláció. Legyen $g(\cdot)$ folytonos és korlátos függvény. Ekkor $g(f(x_1,\dots,x_k))$ folytonos és korlátos függvény, ezért teljesül a

$$\lim_{n\to\infty} Eg(T_n)=\lim_{n\to\infty} Eg\left(f\left(S_{1,n},\dots,S_{k,n}\right)\right)=Eg\left(f\left(S_1,\dots,S_k\right)\right)=Eg(T)$$

reláció. Innen következik a Lemma állítása.

Feladat:

Legyen $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)$ k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó nulla várható értékkel és D kovariancia mátrix-szal. Legyenek a $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ számok a D mátrix sajátértékei (multiplicitással). Bizonyítsuk be (alapvető lineáris algebrai ismeretek felhasználásával), hogy a $\sum\limits_{j=1}^k \eta_j^2$ valószínűségi változó eloszlása megegyezik egy $\sum\limits_{j=1}^k \lambda_j\xi_j^2$ valószínűségi változó eloszlásával, ahol $\xi_1,\dots,\xi_k$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

Megoldás: A D mátrix felírható $D=U\Lambda U^*$ alakban, ahol U unitér, Λ pedig olyan diagonális mátrix, melynek átlójában a D mátrix λ_j sajátértékei vannak. (Az

U mátrix is felírható explicit módon a D nátrix sajátvektorainak segítségével, de erre a tényre itt nincs szükségünk.) Az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ véletlen vektor eloszlása megegyezik egy $\bar\eta = (\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k) = \xi\Lambda^{1/2}U^* = (\xi_1, \dots, \xi_k)\Lambda^{1/2}U^*$ véletlen vektor eloszlásával, ahol a $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor standard normális eloszlású. Valóban $\bar\eta$ normális eloszlású véletlen vektor, melynek várható értéke nulla és kovariancia mátrixa a $(\Lambda^{1/2}U^*)^*\Lambda^{1/2}U^* = U\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}U^* = U\Lambda U^* = D$ mátrix. Ezért a $\sum\limits_{j=1}^k \eta_j^2$ valószínűségi változó eloszlása megegyezik a $\sum\limits_{j=1}^k \bar\eta_j^2$ valószínűségi változó eloszlásával. Vegyük észre, hogy az $\tilde\eta = (\tilde\eta_1, \dots, \tilde\eta_k) = \bar\eta U = (\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k)U$ vektorra teljesül a $\sum\limits_{j=1}^k \bar\eta_j^2 = \sum\limits_{j=1}^k \tilde\eta_j^2$ azonosság, mert U unitér, tehát távolságtartó transzformáció. Viszont $\tilde\eta = \bar\eta U = \xi\Lambda^{1/2}U^*U = \xi\Lambda^{1/2}$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{j=1}^k \eta_j^2$ valószínűségi változó eloszlása megegyezik a $\sum\limits_{j=1}^k (\lambda_j^{1/2}\xi_j)^2 = \sum\limits_{j=1}^k \lambda_j\xi_j^2$ valószínűségi változó eloszlásával, és ez a feladat állítása.

Az alább megfogalmazott eredményen alapul a χ^2 próba.

Tétel. *Legyen adva k darab urna, melyekbe bedobunk egymástól függetlenül golyókat úgy, hogy mindegyik golyó p_j valószínűséggel esik a j-ik urnába, $1 \le j \le k$, $\sum\limits_{j=1}^k p_j = 1$. Jelölje $\nu_n(j)$ a j-ik urnába eső golyók számát az n-ik dobás után. Ekkor a $\sum\limits_{j=1}^k \frac{(\nu_n(j) - np_j)^2}{np_j}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a $k-1$ szabadságfokú $\chi^2(k-1)$ eloszláshoz, ha $n \to \infty$. (Az urnák k száma rögzített.)*

A fenti tételben megjelenő határeloszlás csak az urnák k számától függ, de nem függ a p_j, $1 \le j \le k$, valószínűségektől. Ez jelzi azt, hogy természetes statisztikát vettünk, olyat amelyben a különböző urnákban levő golyók számának az eltérése annak várható értékétől egyforma fontos szerepet játszik. Az, hogy a határeloszlás a $k-1$ szabadságfogú $\chi^2(k-1)$ eloszlás azzal függ össze, hogy bár k véletlen szám súlyozott négyzetösszegét tekintettük, (az egyes urnákba eső golyók számának eltérését tekintettük azok várható értékétől), de ezek között van egy determinisztikus összefüggés. Nevezetesen az, hogy az összes urnába eső golyók száma minusz azok várható értéke nullával egyenlő. Ezt informálisan úgy szokták interpretálni, hogy $k-1$ szabadsági fokkal rendelkező véletlen vektorok koordinátáinak a négyzetösszegét tekintettük, illetve azok határeloszlását. Ilyen esetben a határeloszlást olyan véletlen összeg adja meg, melyben mindegyik szabadsági foknak egy összeadandó felel meg, amelyik független a többi összeadandótól, és az egy standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzete.

A Tétel bizonyítása: A többdimenziós centrális határeloszlástétel alapján a

$$\left(\frac{\nu_n(1) - np_1}{\sqrt{np_1}}, \dots, \frac{\nu_n(k) - np_k}{\sqrt{np_k}}\right)$$

véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak $n \to \infty$ esetén egy olyan $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ k-dimenziós normális eloszlású véletlen vektorhoz, melyre $E\eta_j = 0$, $\mathrm{Var}\, \eta_j = (1 - p_j)$, $1 \le j \le k$, és $\mathrm{Cov}\,(\eta_j, \eta_l) = -\sqrt{p_j p_l}$, ha $1 \le j, l \le k$, és $j \ne l$. Valóban, definálјuk azokat a $\xi_s = (\xi_{s,1}, \dots, \xi_{s,k})$, $s = 1, 2, \dots,$ k-dimenziós valószínűségi változókat, melyekre $\xi_{s,j} = 1$, és $\xi_{s,l} = 0$ $l \ne j$ esetében, ha az s-ik golyó a j-ik urnába esik. Ekkor a $\xi_1, \xi_2, \dots,$ véletlen vektorok függetlenek és egyforma eloszlásúak, $(\nu_n(1), \dots, \nu_n(k)) = \sum\limits_{s=1}^{n} \xi_s$, $E\xi_s = (p_1, \dots, p_k)$, $E\xi_{s,j}^2 = p_j$, $\mathrm{Var}\, \xi_{s,j} = (1 - p_j)p_j$, $\mathrm{Cov}\,(\xi_{s,j}, \xi_{s,l}) = E\xi_{s,j}\xi_{s,l} - E\xi_{s,j}E\xi_{s,l} = -p_j p_l$, ha $j \ne l$. Ezért alkalmazva a több-dimenziós centrális határeloszlástételt a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\xi_{1,s} - E\xi_{1,s}}{\sqrt{p_1}}, \dots, \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\xi_{k,s} - E\xi_{k,s}}{\sqrt{p_k}} \right)$ összegekre megkapjuk a fenti állítást.

Felhasználva ezt az eredményt valamint alkalmazva az előzőleg kimondott lemmát az $f(x_1, \dots, x_k) = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j^2$ függvénnyel kapjuk, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{(\nu_n(j) - np_j)^2}{np_j}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy $\sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j^2$ valószínűségi változóhoz, ahol $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ véletlen vektor k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke nulla, és $D = d_{j,l}$, $d_{j,l} = \mathrm{Cov}\,(\eta_j, \eta_l)$, $1 \le j, l \le k$, kovariancia mátixát a $\mathrm{Var}\, \eta_j = (1 - p_j)$, $1 \le j, l \le k$, és $\mathrm{Cov}\,(\eta_j, \eta_l) = -\sqrt{p_j p_l}$, ha $1 \le j, l \le k$, és $j \ne l$ képletek határozzák meg. Ezért elég belátni azt, hogy egy nulla várható értékű és a fenti kovarianciafüggvénnyel rendelkező normális eloszlású $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ véletlen vektorra a $\sum\limits_{j=1}^{l} \eta_j^2$ kifejezés $\chi^2(k-1)$ eloszlású valószínűségi változó.

Ennek belátása érdekében tekintsük az $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ véletlen vektor $D = (d_{j,l})$, $1 \le j, l \le k$, kovarianciamátrixát, és értsük meg annak szerkezetét. Azt állítjuk, hogy az $u = \left(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k}\right)$ vektor sajátvektora a D kovarianciamátrixnak nulla sajátértékkel és emellett, ha egy $x = (x_1, \dots, x_k)$ vektor merőleges erre az u vektorra, azaz $\sum\limits_{j=1}^{k} x_j \sqrt{p_j} = 0$, akkor az x vektor a D mátrixnak sajátvektora 1 sajátértékkel.

Valóban, tetszőleges $1 \le j \le k$ számra

$$\sum_{l\colon\, l \ne j} \sqrt{p_l} d_{j,l} = -\sqrt{p_j} \sum_{l\colon\, l \ne j} p_l = -\sqrt{p_j}(1 - p_j) = -\sqrt{p_j} d_{j,j},$$

ahonnan $\sum\limits_{l=1}^{k} \sqrt{p_l} d_{j,l} = 0$, ami azt jelenti, hogy az u vektor a D mátrix sajátvektora nulla sajátértékkel. Ha $\sum\limits_{j=1}^{k} x_j \sqrt{p_j} = 0$, akkor minden $1 \le j \le k$ számra

$$\sum_{l\colon\, l \ne j} d_{j,l} x_l = -\sqrt{p_j} \sum_{l\colon\, l \ne j} \sqrt{p_l} x_l = \sqrt{p_j}\sqrt{p_j} x_j = p_j x_j,$$

ahonnan $\sum_{l=1}^{k} d_{j,l}x_l = x_j p_j + x_j(1-p_j) = x_j$, és ez azt jelenti, hogy az x vektor a D mátrix sajátvektora egy sajátértékkel.

Ez azt jelenti, hogy a D kovariancia mátrixnak létezik egy nulla és $k-1$ 1 sajátértékkel rendelkező ortogonális sajátvektora. Valóban, az $u = \left(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k}\right)$ vektor és a rá merőleges altér tetszőleges $k-1$ vektorból álló ortogonális bázisa alkalmas választás. Ezért a Tétel bizonyítása következik a Tétel előtt tárgyalt feladat eredményéből. Ekkor ugyanis a sajátértékek rendszere az 1 számból áll $k-1$ multiplicitással és a nulla számból egy multiplicitással.

Feladat:

Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ m-dimenziós valószínűségi változó $\varphi_1(t_1, \dots, t_m)$ karakterisztikus függvénnyel, $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ n-dimenziós valószínűségi változó $\varphi_2(t_1, \dots, t_n)$ karakterisztikus függvénnyel. A $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektorok akkor és csak akkor függetlenek egymástöl, ha a $(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n)$ $n+m$-dimenziós valószínűségi változó $\varphi_1(t_1, \dots, t_{n+m})$ karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t_1, \dots, t_{n+m}) = \varphi_1(t_1, \dots, t_m)\varphi_2(t_{m+1}, \dots, t_{m+n})$$

alakban írható.

Megoldás: Ha a $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektorok függetlenek, akkor a $(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$\begin{aligned}
\varphi(t_1, \dots, t_{n+m}) &= Ee^{i(t_1\xi_1 + \dots + t_m\xi_m + t_{m+1}\xi_{m+1} + \dots + t_{m+n}\xi_{m+n})} \\
&= Ee^{i(t_1\xi_1 + \dots + t_m\xi_m)} Ee^{i(t_{m+1}\xi_{m+1} + \dots + t_{m+n}\xi_{m+n})} \\
&= \varphi_1(t_1, \dots, t_m)\varphi_2(t_{m+1}, \dots, t_{m+n})
\end{aligned}$$

alakban írható.

Megfordítva, ha a $(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye teljesíti a $\varphi(t_1, \dots, t_{n+m}) = \varphi_1(t_1, \dots, t_m)\varphi_2(t_{m+1}, \dots, t_{m+n})$ azonosságot, akkor $\varphi_1(t_1, \dots, t_m) = \varphi(t_1, \dots, t_m, 0, \dots, 0)$ a $(\xi_1, \dots, \xi_m)$, és hasonlóan $\varphi_2(t_1, \dots, t_n)$ az $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektornak a karakterisztikus függvénye. Tekintsünk két független m illetve n-dimenziós véletlen vektort, melyek eloszlása megegyezik a $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ illetve $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektorok eloszlásával, és ezenkívül függetlenek egymástól. Ezeknek a valószínűségi változóknak a karakterisztikus függvénye a φ_1 illetve φ_2, együttes eloszlásuk pedig a $\varphi(t_1, \dots, t_{n+m})$ függvény. Mivel egy véletlen vektor karakterisztikus függvénye egyértelműen meghatározza e véletlen vektor eloszlását, innen következik, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektorok függetlenek.

A nagy számok erős törvénye.

Tárgyaltuk a nagy számok gyenge törvényét, mely szerint ha tekintjük $\xi_1, \xi_2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$, $j = 1, \dots, n$, összegét és $\frac{S_n}{n}$ átlagát, akkor az $\frac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan konvergálnak egy determinisztikus számhoz, mely szám a ξ_1 valószínűségi változó $E\xi_1$ várható értéke. Beláttuk, (a Csebisev egyenlőtlenség segítségével), hogy a nagy számok gyenge törvénye érvényes akkor, ha a ξ_1 valószínűségi változónak létezik szórásnégyzete. Valójában ez a feltétel lényegesen gyengíthető. Ezenkívül, független valószínűségi változók átlagai nagyon általános feltételek mellett nemcsak sztochasztikusan, hanem egy valószínűséggel is konvergálnak a ξ_1 valószínűségi változó $E\xi_1$ várható értékéhez. Ezt az eredményt nevezik a nagy számok erős törvényének. Megfogalmazom az említett eredményeket és fogalmakat pontosan, és tárgyalni fogom ezen eredmények egymással való kapcsolatát. Sok fontos és tanulságos eredményt csk kimondok, de időhiány miatt a bizonyítását elhagyom.

Először felírom a (részben már korábban ismertetett) különböző konvergenciafogalmakat.

Az egy valószínűségű konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt)*

$$P\left(\omega\colon \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1.$$

Megjegyzés: Az egy valószínűségi konvergenciát a valószínűségszámításban és mértékelméletben majdnem mindenütt való konvergenciának is hívják.

A sztochasztikus konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata akkor konvergál sztochasztikusan egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt) minden $\varepsilon > 0$ számra*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right) = 0.$$

Az eloszlásban való konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez vagy az ezen eloszlásfüggvény által meghatározott eloszláshoz, ha* $\lim_{n\to\infty} P(\xi_n < u) = F(u)$ minden olyan u számra, ahol az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény függvény folytonos. *(Azt mondjuk, hogy a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál egy ξ valószínűségi változóhoz, ha ez a sorozat eloszlásban konvergál az $F(u) = P(\xi < u)$ eloszlásfüggvényhez.)*

A továbbiakban tárgyalni fogjuk (részben kitűzött feladatok formájában) a különböző konvegenciafogalmak közötti kapcsolatot.

Igaz a következő kapcsolat: Egy valószínűségi konvergencia $\Rightarrow$ Sztochasztikus konvergencia $\Rightarrow$ Eloszlásban való konvergencia.

Tárgyaljuk először az egy valószínűségi és sztochasztikus konvergencia kapcsolatát.

Ha $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ egy valószínűséggel, akkor definiálva az

$$A_n = A_n(\varepsilon) = \left\{\omega\colon \sup_{k\ge n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\right\}$$

halmazokat kapjuk, hogy az egymásba skatulyázott A_n halmazokra, (azaz $A_1(\omega) \subset A_2 \subset \cdots$), $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$. Ezért $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 1$. Mivel $\{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} \supset A_n$, $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon) \to 1$, azaz $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \ge \varepsilon) \to 0$, ha $n \to \infty$. Ez azt jelenti, hogy az egy valószínűségű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

Nem kötelező házifeladat:

Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata, akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $\eta_n = \sup\limits_{k\ge n} |\xi_k - \xi|$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0$.

Lássunk példát arra, hogy lehetséges olyan ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, és ξ valószínűségi változókat konstruálni, melyekre a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan tart ξ-hez, de a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Tekintsük a következő $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt: Ω a $[0, 1]$ intervallum, $\mathcal{A}$ a Borel mérhető halmazok σ-algebrája a $[0, 1]$ intervallumon, a P valószínűségi mérték a Lebesgue mérték. Legyen

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left[(n - 2^k)2^{-k}, (n + 1 - 2^k)2^{-k}\right] \\ 0 & \text{ha } x \notin \left[(n - 2^k)2^{-k}, (n + 1 - 2^k)2^{-k}\right] \end{cases}$$
$$\text{akkor ha } 2^k \le n < 2^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

és $\xi(x) = 0$ minden $0 \le x \le 1$ számra. Ekkor $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 2^{-k}$ minden $\varepsilon > 0$ számra, ha $2^k \le n < 2^{k+1}$. Tehát a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan konvergál a ξ valószínűségi változóhoz. Viszont mivel $\limsup\limits_{n\to\infty} \xi_n(x) = 1$ minden $0 \le x \le 1$ számra, ezért a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Másrészt a Borel-Cantelli lemmából következik, hogy amennyiben minden $\varepsilon > 0$ számra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$, akkor a ξ_n sorozat egy valószínűséggel konvergál a ξ valószínűségi változóhoz. Miért?

A sztochasztikus konvergencia és eloszlában való konvergencia közötti kapcsolatra érvényesek a következő nem kötelező házi feladatok formájában megfogalmazott állítások.

Nem kötelező házifeladat:

a.) Ha ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak egy ξ valószínűségi változóhoz, akkor a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban is konvergálnak ehhez a ξ valószínűségi változóhoz.

b.) Ennek az állításnak a megfordítása nem igaz. Például, ha ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyek nem elfajultak, azaz nincs olyan konstans melyeket ezek a valószínűségi változók egy valószínűséggel vesznek fel, akkor a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a ξ_1 valószínűségi változóhoz, viszont nem konvergálnak sztochasztikusan.

c.) Viszont igaz a következő állítás: Ha ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy a konstanshoz, (azaz egy olyan valószínűségi változóhoz, mely egy valószínűséggel az a konstanst veszi fel, akkor a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan is konvergál ehhez az a konstanshoz.

Most rátérünk annak tárgyalására, hogyan lehet a nagy számok gyenge törvényének a Csebisev egyenlőtlenségen alapuló bizonyítását finomítva a nagy számok erős törvényét is bebizonyítani alkalmas feltételek mellett. Az alább ismertetendő érvelésben valójában a tétel bizonyítása érdekében a szükségesnél sokkal erősebb kikötéseket teszünk. Idézzük fel a Csebisev egyenlőtlenséget, illetve a nagy számok gyenge törvényének a bizonyítását a Csebisev egyenlőtlenség segítségével.

Csebisev egyenlőtlenség: *Ha a ξ valószínűségi változó második momentuma $E\xi^2 = m^2$, akkor tetszőleges $x > 0$ számra*

$$P(|\xi| > x) \le \frac{m_2}{x^2}.$$

Innen következik, ha ezt az egyenlőtlenséget a $\bar{\xi} = \xi - E\xi$ valószínűségi változóra alkalmazzuk, hogy

$$P(|\xi - E\xi| > x) \le \frac{\operatorname{Var}\xi}{x^2},$$

Megjegyzés: A Csebisev egyenlőtlenség a Markov egyenlőtlenség következménye, mely szerint $P(|\xi| > x) \le \dfrac{E|\xi|}{x}$. Alkalmazva ezt az állítást a ξ^2 valószínűségi változóra kapjuk a Csebisev egyenlőtlenséget. Hasonló módon, alkalmazva a Markov egyenlőtlenséget a ξ^{2k} valószínűségi változóra, ahol k tetszőleges pozitív egész szám, $x > 0$, kapjuk, hogy $P(|\xi| > x) \le \dfrac{E\xi^{2k}}{x^{2k}}$

A nagy számok gyenge törvényét úgy bizonyítottuk be, hogy megvizsgáltuk milyen becslést ad a Csebisev egyenlőtlenség annak valószínűségére, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók átlaga legalább ε-nal eltér e változók várható értékétől. Idézzük fel ezt a számolást, illetve ezzel párhuzamosan vizsgáljuk meg azt is, milyen becslést kapunk, ha továbbre is azt a valószínűségi változót vizsgáljuk, melyet úgy kapunk, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók átlaga minusz azok várható értékét vesszük, de most ennek a valószínűségi változónak nemcsak a második momentumát számoljuk ki, mint tettük a Csebisev egyenlőtlenség alkalmazásában, hanem a negyediket is. Látni fogjuk, hogy ekkor érdekes új eredményeket kapunk.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Tegyük fel, hogy $E\xi_1 = 0$, és vizsgáljuk az

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)^2, \quad E\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \quad \text{és} \quad P\left(\frac{|S_n|}{n} > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\xi_1\right| > \varepsilon\right), \ \varepsilon > 0$$

kifejezéseket. Az utolsó valószínűség vizsgálatában nem jelent megszorítást az $E\xi_1 = 0$ feltétel, mert a ξ_j valószínűségi változókat a $\xi_j - E\xi_j$ valószínűségi változókkal helyettesítve az általános esetet erre a speciális esetre redukálhatjuk.

$$\operatorname{Var}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}S_n = \frac{n}{n^2}\operatorname{Var}\xi_1 = \frac{1}{n}\operatorname{Var}\xi_1, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\operatorname{Var}\xi_1}{n\varepsilon^2}.$$

Innen következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0$, tehát érvényes a nagy számok gyenge törvénye.

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 = \frac{1}{n^4}E(\xi_1 + \dots + \xi_n)^4,$$

$$\begin{aligned}
E(\xi_1 + \dots + \xi_n)^4 = {} & \sum_{k=1}^n E\xi_k^4 + 6\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} E\xi_j^2 E\xi_k^2 + 4\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} \underbrace{E\xi_j^3 E\xi_k}_{=0} \\
& + 4\sum_{\substack{1\le j,k,l\le n\\ j,k,l \text{ különböző számok}}} \underbrace{E\xi_j^2 E\xi_k E\xi_l}_{=0} \\
& + \sum_{\substack{1\le j,k,l,m\le n\\ j,k,l,m \text{ különböző számok}}} \underbrace{E\xi_j E\xi_k E\xi_l E\xi_m}_{=0} \\
= {} & nE\xi_1^4 + 6n(n-1)(E\xi_1^2)^2,
\end{aligned}$$

ezért

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\frac{1}{n}E\xi_1^4 + 6\left(1 - \frac{1}{n}\right)(E\xi_1)^2)}{n^2\varepsilon^4} \le \frac{\text{const.}}{n^2\varepsilon^4}.$$

Innen következik, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < \infty$ minden $\varepsilon > 0$ számra, és a Borel–Cantelli lemma (könnyebbik feléből) következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra és majdnem minden $\omega \in \Omega$ pontban teljesül, hogy $\left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| \le \varepsilon$, ha $n \ge n_0(\omega)$. Alkalmazva ezt a relációt minden $\varepsilon = \frac{1}{k}$ számra $k = 1, 2, \dots$, kapjuk a nagy számok erős törvényét, melyet az alábbi tételben fogalmazunk meg.

A nagy számok erős törvényéről szóló tétel *gyenge formája***:** *Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független egyforma eloszláaú valószínűségi változók sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melyekre teljesül az $E\xi_1^4 < \infty$ feltétel, és vezessük be az $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ valószínűségi változókat. Ekkor az $\frac{S_n(\omega)}{n}$ valószínűségi változók majdnem minden $\omega \in \Omega$-ra konvergálnak ez $E\xi_1$, számhoz, azaz ezek a valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét.*

Megfogalmazom a nagy számok gyenge törvényét kimondó tételt eredeti, éles formájában is.

A nagy számok erős törvényét kimondó tétel. *Legyen ξ_1, ξ_2, $\dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Az $\frac{S_n(\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat akkor és csak akkor konvergál pozitív valószínűséggel, ha $E|\xi_1| < \infty$. Ha $E|\xi_1| < \infty$, akkor ez a sorozat teljesíti a nagy számok erős törvényét, azaz*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = E\xi_1 \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega\textit{-ra.}$$

Láttuk, hogy a nagy számok különböző törvényeit kimondó tételekben az összeadandók momentumairól teszünk fel bizonyos feltételeket. Sőt, az utoljára kimondott tétel a nagy számok erős törvényéről, egyben jelzi azt, hogy ez a feltétel nemcsak elégséges, hanem szükséges feltétel is. Felmerülhet a kérdés, miért játszik olyan fontos szerepet a momentumok létezése ezekben az eredményekben.

A nagy számok törvényei olyan állítást fogalmaznak meg, hogy független valószínűségi változók átlagai egyfajta tipikus viselkedést mutatnak, amelyikben az egyes összeadandók hatása önmagában nem jelentős, azaz nagy valószínűséggel nem fordulhat elő, hogy van az összegben olyan kiugróan nagy értéket felvevő tag, melynek hatása összemérhető az összes többi tag hatásával. Márpedig az, hogy egy valószínűségi változó valamely momentuma kisebb egy adott számnál olyan tulajdonságot fogalmaz meg, mely szerint a valószínűségi változó kis valószínűséggel vesz fel nagy értékeket. Ahhoz, hogy finomabb vizsgálatokat el tudjunk végezni, ki kell tudnunk fejezni a momentumok végességét az eloszlásfüggvények nyelvén. Ezért fogalmazom meg a következő állítást, melyet időhiány miatt csak (nem kötelező házi feladat) formájában tárgyalok.

Nem kötelező házi feladat.

A ξ valószínűségi változó abszolut értékének akkor és csak akkor létezik várható értéke, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi|>n)<\infty$, a $|\xi|$ valószínűségi változónak akkor és csak akkor van véges második momentuma, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nP(|\xi|>n)<\infty$. Általánosabban $E|\xi|^k<\infty$ valamilyen $k=1,2,\dots,$ számra akkor és csak akkor, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{k-1}P(|\xi|>n)<\infty$.

Megmutatjuk az előbbi feladat eredményének és a Borel–Cantelli lemma segítségével, hogy amennyiben $E|\xi_1|=\infty$, akkor a ξ_1 valószínűségi változóval azonos eloszlású ξ_j, $j=1,2,\dots,$ független valószínűségi változók nem teljesítik a nagy számok erős törvényét. Pontosabban azt állítjuk, hogy ebben az esetben az $S_n(\omega)=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j(\omega)$, $n=1,2,\dots,$ összegekre az $S_n(\omega)$ majdnem minden $\omega\in\Omega$ pontban nem konvergens.

Valóban, az előbb megfogalmazott eredmény, és a ξ_j valószínűségi változók azonos eloszlása miatt az $E|\xi_1|=\infty$ feltételből következik, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|\xi_1|>n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|\xi_n|>n)=\infty$. Ezért, és a ξ_n valószínűségi változók függetlensége miatt a Borel–Cantelli lemmából következik, hogy majdnem minden $\omega\in\Omega$-ra $|\xi_n(\omega)|>n$ végtelen sok az (ω elemi eseménytől függő) n indexre. Valóban, tegyük fel, hogy valamely $\omega\in\Omega$ elemi eseményre $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n(\omega)}{n}=a$ valamilyen véges a számra, amelyik értéke függhet az ω elemi eseménytől. Ekkor viszont a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}(\omega)}{n}=a$ reláció is teljesül, ahonnan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{S_n(\omega)}{n}-\dfrac{S_{n-1}(\omega)}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\xi_n(\omega)}{n}=0$. Ez a reláció viszont, mint láttuk egy 1 valószínűségi halmazon nem teljesül.

Láttuk, hogy mind a nagy számok gyenge mind a nagy számok erős törvényének bizonyításához arra van szükségünk, hogy képesek legyünk független (és egyforma eloszlású), nulla várható értékű $\xi_1,\xi_2,\dots,$ valószínűségi változók $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$, $n=1,2,\dots,$ összegének eloszlásfüggvényére jó becslést tudjunk adni. Pontosabban arra van szükségünk, hogy jól meg tudjuk becsülni minden n indexre és rögzített $\varepsilon>0$ számra a $P(|S_n|>\varepsilon n)$ valószínűségeket. Valójában a nagy számok erős törvényének a bizonyításában hasznosabb, ha a $P\left(\sup\limits_{1\le m\le n}|S_m|>\varepsilon n\right)$ valószínűségeket tudjuk jól megbecsülni. Első látásra azt gondolhatnánk, hogy az ilyen valószínűségek becslésére alkalmazhatnánk a centrális határeloszlástételt. Valójában a helyzet bonyolultabb.

A centrális határeloszlástétel jó aszimptotikát ad a $P(S_n>x\sqrt{n})$ valószínűségekre nagy n indexre, és rögzített x számra. De szabad-e rögzített x helyett n-től függő $x_n=\varepsilon\sqrt{n}$ számot írni, és alkalmazni formálisan a centrális határeloszlásban szereplő képletet nem törődve az x_n számnak az n indextől való függésével? Az, hogy e kérdés felvetésénél nem formális kötőzködésről van szó mutatja a következő egyszerű példa: Legyenek $\xi_1, \xi_2 \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$, $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$. Ekkor a $p_n(x) = P(S_n \ge nx)$ valószínűségre $p_n(x) = 0$, ha $x > 1$, és $p_n(x) = 2^{-n}$, ha $x = 1$. (Az $x < 1$ esetben is jó aszimptotikus formulát lehet adni a $p_n(x)$ mennyiségre, de ahhoz külön vizsgálódás lenne szükséges, ezért ezt most nem tesszük.) Ez a példa azt mutatja, hogy a $p_n(x)$ függvény nem úgy viselkedik, ahogy a centrális határeloszlástételből adódó formális analógia sugallná. A $P(S_n \ge nx)$ alakú valószínűségek vizsgálatával a valószínűségszámítás egyik fontos és érdekes fejezete a nagy eltérések elmélete foglalkozik. Ez az elmélet nem témája a jelen előadássorozatnak.

A nagy számok erős törvényének a bizonyítását nem dolgozom ki. Mindössze azt teszem, hogy megfogalmazom a valószínűségszámítás egy fontos egyenlőtlenségét, melynek az itt nem tárgyalt bizonyítása is tanulságos, és a részletek kidolgozása nélkül jelzem, hogyan következik a Kolmogorov egyenlőtlenségből a nagy számok erős törvénye.

Kolmogorov egyenlőtlenség. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, (nem feltétlenül egyforma eloszlású) valószínűségi változók, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$, $S_k = \sum\limits_{p=1}^{k} \xi_p$, $k = 1, \dots, n$. Ekkor*

$$P\left(\sup_{1 \le k \le n} |S_k| \ge x\right) \le \frac{ES_n^2}{x^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2}{x^2}$$

minden $x > 0$-ra.

Érdemes megjegyezni, hogy a Kolmogorov egyenlőtlenség ugyanazt a felső becslést adja annak valószínűségére, hogy az S_k részletösszegek szuprémuma nagyobb mint valamilyen $x > 0$ szám, mint amit a Csebisev egyenlőtlenség ad annak az eseménynek a valószínűségére, hogy az utolsó tag S_n nagyobb, mint x. Természetesen

$$P\left(\sup_{1 \le k \le n} |S_k| > x|\right) \ge P\left(S_n| > x|\right),$$

de mint ahogy a Kolmogorov és Csebisev egyenlőtlenség összehasonlítása is sugallja a fenti egyenlőtlenség baloldala nem sokkal nagyobb mint a jobboldala.

A nagy számok erős törvényének bizonyításvázlata a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével. Természetes gondolat szétválasztani a ξ_n valószínűségi változók túl nagy és nem túl nagy értékeinek a hatását a bizonyításban. Ez sugallja, hogy érdemes a ξ_n valószínűségi változók következő felbontását venni: $\xi_n = \xi_n I(|\xi_n| \le n) + \xi_n I(|\xi_n| > n) = \xi_n' + \xi_n''$, ahol $I(A)$ egy A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Azt, hogy a ξ_n valószínűségi változó értékeit az n szinten csonkítottuk az teszi természetessé, hogy az utolsó kitűzött feladat szerint az $E|\xi_1| < \infty$ feltétel ekvivalens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(\xi_n'' = 0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| > n) < \infty$ feltétellel, ami azt jelenti, hogy egy valószínűséggel, a

ξ_n'' valószínűségi változók véges sok kivétellel nullával egyenlőek. Ez azt jelenti, hogy elég a véges szórással rendelkező ξ_n' valószínűségi változók összegeinek maximumára jó becslést adni. Ez lehetséges a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével, ha jó becslést tudunk adni a ξ_n' valószínűségi változók várható értékére és szórásnégyzetére.

Némi nem túl nehéz, de itt nem tárgyalt számolás segítségével meg lehet mutatni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}E\xi_k' = -\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}E\xi_k'' = 0$, és ez lehetővé teszi a feladat redukálását arra a problémára, hogy a $\bar\xi_k = \xi_k' - E\xi_k'$ valószínűségi változók $\bar S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\bar\xi_k$ összegei teljesítik a $\dfrac{\bar S_n}{n} \to 0$ relációt 1 valószínűséggel. Ez a redukció azért hasznos, mert ekkor független, nulla várható értékű valószínűségi változók átlagát kell vizsgálni, és ekkor alkalmazhatjuk a Kolmogorov egyenlőtlenséget. Némi (az integrálok átrendezésén múló, de itt nem tárgyalt) számolás segítségével megmutatható, hogy teljesül a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{Var}\bar\xi_k}{k^2}<\infty$ azonosság. Ennek felhasználásával a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével a következő becsléseket hajthatjuk végre.

$$
\begin{aligned}
P\left(\sup_{2^{n-1}<k\le 2^n}|S_k-S_{2^{n-1}}|>\varepsilon 2^{n-1}\right) &= P\left(\sup_{1\le k\le 2^{n-1}}\left|\sum_{j=1}^{k}\xi_{j+2^{n-1}}\right|>\varepsilon 2^{n-1}\right)\\
&\le \frac{\sum\limits_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}\operatorname{Var}\xi_k}{\varepsilon^2 2^{2(n-1)}} \le \text{const.}\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}\frac{\operatorname{Var}\xi_k}{\varepsilon^2 k^2},
\end{aligned}
$$

ahonnan a $\bar\xi_k$ valószínűségi változók szórásnégyzetére felírt becslés alapján

$$
\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\sup_{2^{n-1}<k\le 2^n}|S_k-S_{2^{n-1}}|>\varepsilon 2^{n-1}\right)<\infty.
$$

Ezért a Borel–Cantelli lemma alapján egy valószínűséggel

$$
\sup_{2^{n-1}<k\le 2^n}|S_k(\omega)-S_{2^{n-1}}(\omega)|\le\varepsilon 2^{n-1}\quad\text{véges sok (ω-tól függő) n index kivételével.}
$$

Innen viszont $S_N(\omega)\le\sum\limits_{n\colon\, 2^{n-1}\le N}\ \sup\limits_{2^{n-1}<k\le 2^n}|S_k(\omega)-S_{2^{n-1}}(\omega)|\le \text{const.}+4N\varepsilon$ majdnem minden ω-ra egy csak ω-tól függő konstanssal. Mivel ez az állítás minden $\varepsilon>0$-ra és N-re igaz, innen következik a nagy számok erős törvénye.

Annak szükséges és elégséges feltétele is ismert, hogy független egyforma eloszlású valószínűségi változók teljesítsék a nagy számok gyenge törvényét. Megfogalmazom ezt az eredményt, de az állítás bizonyítását elhagyom.

Tétel. *Legyen* ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, *független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata* F *eloszlásfüggvénnyel. Ezek a valószínűségi változók akkor és csak akkor teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, azaz a* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ *átlag akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan* $n \to \infty$ *esetében egy* a *számhoz,* $-\infty < a < \infty$, *ha*

$$\lim_{x\to\infty} x\left[F(-x) + (1 - F(x))\right] = 0, \quad \text{és} \quad \lim_{u\to\infty}\int_{-u}^{u} xF(\,dx) = a.$$

Ha összehasonlítjuk a nagy számok gyenge és erős törvényét azt látjuk, hogy a nagy számok gyenge törvénye némileg enyhébb megkötések mellett érvényes mint a nagy számok erős törvénye. Érdemes látni független, egyforma eloszlású valószínűségi változók olyan sorozatát, amelyik teljesíti a nagy számok gyenge, de nem teljesíti a nagy számok erős törvényét. Ilyen példát fogalmazok meg a következő nem kötelező házi feladatban. Egyben jelzem, hogyan lehet bebizonyítani azt, hogy ez a példa teljesíti a nagy számok gyenge törvényét anélkül, hogy felhasználnánk a nem bizonyított tételt a nagy számok gyenge törvényének szükséges és elégséges feltételéről.

Nem kötelező házi feladat

Legyen ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, az $f(x) = \dfrac{C}{x^2\log|x|}$, ha $|x| > 2$. $f(x) = 0$, ha $|x| \le 2$, képlettel megadott sűrűségfüggvénnyel. ($\displaystyle\int_{|x|>2}\frac{C\,dx}{x^2\log|x|} = 1$.) Definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Lássuk be, hogy $E|\xi_1| = \infty$, ezért ezek a valószínűségi változók nem teljesítik a nagy számok erős törvényét. Másrészt az $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \to 0$, ha $n \to \infty$.

Segítség: Legyen $\bar\xi_k = \bar\xi_k^{(n)} = \xi_k I\left(|\xi_k| \le a_n\right)$, $\bar{\bar\xi}_k = \bar{\bar\xi}_k^{(n)} = \xi_k I\left(|\xi_k| > a_n\right)$, és $\bar S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\bar\xi_k$, $\bar{\bar S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\bar\xi}_k$. Ekkor $P(|S_n| > \varepsilon n) \le P\left(|\bar S_n| > \frac{\varepsilon}{2}n\right) + P\left(|\bar{\bar S}_n| > \frac{\varepsilon}{2}n\right) \le \dfrac{\operatorname{Var}\bar S_n}{\frac{\varepsilon^2}{4}n^2} + nP\left(\bar{\bar\xi}_1 \ne 0\right)$. Adjunk az a_n konstans alkalmas megválasztásával (például $a_n = n$) jó becslést a $P(|S_n| > n\varepsilon)$ valószínűségre.

Természetesen felvetődik a következő kérdés: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E\xi_1 = 0$. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor a nagy számok gyenge törvénye szerint a $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, a nagy számok erős törvénye szerint pedig egy valószínűséggel is nullához tartanak. Hogyan lehet élesíteni a nagy számok gyenge illetve erős törvényét?

Pontosabban fogalmazva, milyen a_n, $n = 1, 2, \ldots$ sorozatokra mondhatjuk, hogy $\frac{S_n}{a_n}$ sztochasztikusan tart nullához, ha $n \to \infty$? Milyen b_n, $n = 1, 2, \ldots$ sorozatokra mondhatjuk, hogy $\frac{S_n}{b_n}$ egy valószínűséggel tart nullához, ha $n \to \infty$? Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy olyan valószínűségi változókat tekintünk, melyeknek van második momentumuk.

Az első kérdésre a válasz viszonylag egyszerű következménye a centrális határeloszlástételnek, és ezt tartalmazza a következő feladat. A második kérdésre a választ nehezebb megadni. Erre a kérdésre az alább megfogalmazott bizonyítás nélkül közölt iterált logaritmustétel adja meg a választ.

Feladat:

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E\xi_1 = 0$ és $E\xi_1^2 < \infty$. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Ekkor pozitív valós számok valamely a_n sorozatára a $\frac{S_n}{a_n}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor tartanak sztochasztikusan nullához $n \to \infty$ esetén, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \infty$.

Végül megfogalmazom a valószínűségszámítás egyik híres eredményét, az úgynevezett iterált logaritmus tételt

Iterált logaritmus tétel. *Legyenek $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók valamilyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melyekre $E\xi_1(\omega) = 0$,* $\operatorname{Var}\xi_1(\omega) = \sigma^2 < \infty$. *Ekkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} = 1, \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ elemi eseményre,}$$

és

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} = -1, \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ elemi eseményre.}$$