

A Valószínűségszámítás I. előadássorozat harmadik előadása.

2001 február 13.

Összefoglaló:

Feltételes valószínűség tárgyalása. (folytatás)

A feltételes és hagyományos valószínűség fogalmai között fogalmaz meg kapcsolatot a következő lemma.

Lemma. Legyen (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mező, és legyen rajtva adva egy $B \in \mathcal{A}$ esemény, melyre $P(B) > 0$. Vezessük be a P_B , $P_B(A) = P(A|B)$, $A \in \mathcal{A}$, halmazfüggvényt a \mathcal{A} σ -algebrán. Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ szintén valószínűségi mező.

Megjegyzés; Ez az állítás megtalálható a Fazekas könyv 3.5 feladatában. Ugyancsak ezen az oldalon található a 3.2 Állítás, mely nagyon hasonló ehhez. Egy különbség van a két állítás között. Mi az eredeti valószínűségi mező σ -algebráját nem változtattuk meg. A Fazekas könyv 3.2 állításában az $A \cap B$, $A \in \mathcal{A}$ alakú halmazokra van megszorítva a σ -algebra.

Bizonyítás: $P_B(\Omega) = 1$, \mathcal{A} σ -algebra, azt kell még ellenőrizni, hogy P_B σ -additív az \mathcal{A} σ algebrán, azaz, ha A_n , $n = 1, 2, \dots$, diszjunkt halmazok, akkor $P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n)$. Viszont ebben az esetben az $A_n \cap B$ halmazok is diszjunktak, ezért

$$\begin{aligned} P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \frac{P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n). \end{aligned}$$

Megfogalmaztunk néhány egyszerű állítást a feltételes valószínűségről. Ezeket nem kell feltétlenül megtanulni, mert olyan összefüggéseket fejeznek ki, melyekre az ember magától is rájön. Fontosabb inkább megérteni azt, hogy a tárgyalt példákban ezeket az összefüggéseket hogyan használjuk.

Először felidéztek a Fazekas könyv 3.6 definícióját (33. oldal), mely lényegében nem más mint a halmazelméletben szereplő partició fogalmának újrafogalmazása a valószínűségszámítás terminológiájával.

Teljes eseményrendszer definíciója Legyen adva egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mező, azon $A_n \in \mathcal{A}$ események (halmazok) véges vagy megszámlálhatóan végtelen rendszere. Azt mondjuk, hogy az A_n események teljes eseményrendszert alkotnak, ha azok diszjunkt halmazok (más szóval egymást kizáró események), és $\bigcup_n A_n = \Omega$.

Teljes valószínűség tétele. *Alkossanak a B_n halmazok pozitív valószínűségi halmazokból álló teljes eseményrendszert. Ekkor tetszőleges A halmazra*

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots$$

(Lásd Fazekas könyv 3.7 tételét a 33. oldalon.)

Bizonyítás:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots$$

Bayes formula. (lásd Fazekas könyv 35. oldal.)

$$P(B|A) = P(A|B) \frac{P(B)}{P(A)}, \quad \text{ha } P(A) > 0, \text{ és } P(B) > 0.$$

Megfogalmazzuk a következő (egyszerű) eredményt, melyet hívnak néha a teljes eseményrendszerről szóló tételnek is. (Lásd Fazekas könyv 3.10 Tétel a 36. oldalon.)

Tétel. *Legyen adva egy A esemény és egy B_1, B_2, \dots , teljes eseményrendszer. Ekkor*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n)} \quad \text{minden } i = 1, 2, \dots, \text{ számra.}$$

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a felírt kifejezésben a számláló

$$P(A|B_i)P(B_i) = P(A \cap B_i),$$

a nevező pedig $\sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = P(A)$.

Konkrét esetekben ezekre az összefüggésekre magunk is rájöhettünk anélkül, hogy a formális képleteket nézzük. Tekintettünk néhány példát.

Feladatok:

Három gép gyárt csavarokat, az egyik 0.01 a második 0.02 a harmadik 0.03 valószínűséggel gyárt hibás csavarokat. A csavarokat egy raktárba viszik, és összekeverik azokat. Egy gyártott csavar 0.5 valószínűséggel készült az első 0.3 valószínűséggel a második és 0.2 valószínűséggel készült a harmadik gépen. Kiveszünk egy csavart, megnézzük, és azt találjuk, hogy az hibás. Milyen valószínűséggel készült a csavar eme feltételek mellett az első gépen?

Megoldás: Jölje A_1 , A_2 illetve A_3 azt az eseményt, hogy a csavar az első, második vagy harmadik gépen készült, B azt az eseményt, hogy a csavar hibás. Ekkor minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$,

$P(A_3) = 0.2$, továbbá $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_2) = 0.02$, és $P(B|A_3) = 0.03$.
Ekkor

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)} \\ &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2}. \end{aligned}$$

Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont

$$P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}.$$

Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{1}{11}$.

Megfogalmaztam a következő házi feladatot:

Házi feladat:

Két különböző fáról leszednek 10 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen dobozba.) Ez egyik fáról szedett almák (egymástól függetlenül) $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig (szintén egymástól függetlenül) $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik dobozból két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik dobozból egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Ezután a következő feladatot tárgyaltuk. (lásd a Fazekas könyvben a 3.4 Példát a 32. oldalon)

Ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is dolgozatot ír.

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy a legrosszabb diák ír dolgozatot, B azt az eseményt, hogy a legjobb diák ír dolgozatot. Ekkor mi a $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

feltételes valószínűséget akarjuk kiszámítani. Viszont $P(A \cap B) = \frac{\binom{n-2}{r-2}}{\binom{n}{r}}$, mert

$\binom{n-2}{r-2}$ olyan választás van, melyben mind a legjobb mind a legrosszabb diák ír dolgozatot, összesen $\binom{n}{r}$ választás van, és minden választás egyforma valószínű.

Hasonlóan, $P(B) = \frac{\binom{n-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$. Innen egyszerű számolással

$$P(A|B) = \frac{\binom{n-2}{r-2}}{\binom{n-1}{r-1}} = \frac{r-1}{n-1}.$$

A gyakorlaton e feladatnak más heurisztikus tárgyalását is vizsgáltuk, illetve azt, hogy miért adnak a heurisztikus érvelések helyes eredményt.

Események függetlensége.

Ez a valószínűségszámítás egyik legfontosabb fogalma. Heurisztikusan azt mondhatjuk, hogy egy A esemény akkor független egy B eseménytől, ha a A esemény bekövetkezése vagy be nem következése nem befolyásolja annak valószínűségét, hogy a B esemény bekövetkezik-e. Ez azt sugallja, hogy a B esemény akkor független az A eseménytől, ha $P(B|A) = P(B)$. Ezt az összefüggést átrendzve jutunk a következő definícióhoz.

Két esemény függetlenségének a definíciója. Azt mondjuk, hogy egy A és B esemény független, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ez a definíció azonban önmagában nem kielégítő számunkra. Beszélni akarunk több esemény függetlenségéről is. Ezért a következő definíciót is bevezetjük.

Több esemény függetlenségének definíciója: Az A_1, \dots, A_n események akkor (teljesen) függetlenek, ha az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaz minden $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ részhalmazára

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_k}).$$

Események végtelen A_1, A_2, \dots sorozata akkor és csak akkor független, ha tetszőleges pozitív n egész számra az A_1, \dots, A_n események függetlenek.

Speciálisan $n = 3$ esetben ez a definíció a következőt jelenti: Az A , B és C

események akkor függetlenek, ha a következő azonosságok *mindegyike* teljesül:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C). \end{aligned}$$

Megmutatandó, hogy ezen feltételek mindegyike fontos tekintsük a következő feladatot.

Adjunk példát egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőre azon három A_1, A_2 és A_3 eseményre, melyekre $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, de az A_1, A_2 és A_3 események nem függetlenek.

Egy lehetséges konstrukció: Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, \mathcal{A} az Ω halmaz összes részhalmazából álló σ -algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = y$, $P(\{5\}) = 1 - x - 3y$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum_{u \in A} P(\{u\})$ minden

$A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ és $A_3 = \{1, 4\}$ halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = x$. Másrészt $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = x + y$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy

$x = (x + y)^3$. Egy lehetőség erre, $x + y = \frac{1}{3}$, és ekkor $x = (x + y)^3 = \frac{1}{27}$, $y = \frac{8}{27}$,

továbbá $P(\{5\}) = \frac{2}{27}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Viszont $A_1 \cap A_2 = \{1\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, így nyilván $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$. Tehát a függetlenség nem teljesül.

Fogalmazzuk meg a független eseményekre vonatkozó tulajdonságok közül a legfontosabbakat.

Ha A_1, \dots, A_n független események, és bevezetjük az $A_j^1 = A_j$ és $A_j^{-1} = \Omega \setminus A_j$ jelöléseket, akkor tetszőleges $\varepsilon_j = \pm 1$, $1 \leq j \leq n$ sorozatra az $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ események függetlenek.

Indoklás: Elég belátni, hogy egy A_j halmaz kicserélése az A_j^{-1} halmazra nem változtatja meg a halmazrendszer függetlenségét. Továbbá az indexek szimmetria tulajdonsága miatt elég a $j = 1$ esettel foglalkozni. Ezután a függetlenséget definiáló relációk közül elég azokat ellenőrizni, amelyekben a $j = 1$ index szerepel. Azt kell megmutatni, hogy az A_1, \dots, A_n események függetlensége esetén teljesül az

$$P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) = P(\Omega \setminus A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s})$$

azonosság minden $2 \leq l_1 < \dots < l_s$ indexre. Viszont ekkor

$$\begin{aligned} P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) &= P(A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) - P(A_1 \cap A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) \\ &= P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) - P(A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\ &= (1 - P(A_1))P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\ &= P(\Omega \setminus A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}). \end{aligned}$$

Legyenek $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ események függetlenek egymástól. Lássuk be, hogy tetszőleges olyan C eseményre, amelyik előállítható az A_1, \dots, A_k halmazokból metszet, unió és komplementerképzés segítségével igaz, hogy a B_1, \dots, B_m és C halmazok függetlenek.

Indoklás: Lássuk be, hogy minden ilyen C halmaz felírható az előző feladat jelölését használva $C = \bigcup_{(j_1, \dots, j_n) \in J} A^{\varepsilon_{j_1}} \cap \dots \cap A^{\varepsilon_{j_n}}$ alakban, ahol J egy n hosszúságú ± 1 sorozatokból álló halmaz. Továbbá az ebben a kifejezésben szereplő $A^{\varepsilon_{j_1}} \cap \dots \cap A^{\varepsilon_{j_n}}$ események diszjunktak, és függetlenek a B_1, \dots, B_m eseményektől.

Ezután tekintettünk néhány példát.

Egy 100 tagú társaság minden egyes tagja egymástól függetlenül $\frac{1}{1000}$ valószínűséggel betegszik meg. Mi annak a valószínűsége, hogy a társaságnak lesz beteg tagja? A kapott eredményről mit mondhatunk? Az nagyon nagy, majdnem 1 vagy nagyon kicsi majdnem nulla?

Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy a társaság j -ik megbetegszik meg. Ekkor a $P(A_j) = \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenek. Számoljuk ki először a minket érdeklő esemény komplementerének, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy mindenki egészséges. Ez az $\bigcap_{j=1}^{1000} (\Omega \setminus A_j)$ esemény. Mivel $P(\Omega \setminus A_j) = 1 - \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenségéből következik az $\Omega \setminus A_j$ események függetlensége is, ezért $P\left(\bigcap_{j=1}^{1000} (\Omega \setminus A_j)\right) = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}$. Innen a minket érdeklő esemény valószínűsége $1 - \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}$.

Végül jegyezzük meg, hogy $\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} = \left(\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{1/10} \sim e^{-1/10}$.

Miért? Ez a szám nagyon közel van az egyhez, ezért a minket érdeklő valószínűség értéke kicsi.

Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega = \{1, \dots, n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, \mathcal{A} az Ω összes részhalmazaiból álló σ -algebra,

$$P(A) = \frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

Legyen $n = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j = \{m : m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1 \leq j \leq k$. Legyen $B = \{m : m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

a. Az A_1, \dots, A_k események függetlenek.

b. $P(B) = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, azaz összesen $n \cdot \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$ n -nél kisebb és az n -hez képest relatív prim van.

Megoldás: $A_j = \left\{ p_j, 2p_j, \dots, \frac{n}{p_j}p_j \right\}$ egy $\frac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j) = \frac{1}{p_j}$, $1 \leq j \leq k$. Az $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}$ halmaz az n -nél kisebb $p_{j_1} \dots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq k$ sorozatra, ezért számossága $\frac{n}{p_{j_1} \dots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = \frac{1}{p_{j_1} \dots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_s})$ minden $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, \dots, A_k halmazok függetlenek.

Végül $B = \Omega \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k) = \bigcap_{j=1}^k (\Omega \setminus A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B) = \prod_{j=1}^k P(\Omega \setminus A_j) = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.

Végül hozzákezdünk a valószínűségszámítás egyik fontos eredményének a Borel–Cantelli lemma ismertetéséhez. Először informálisan ismertetem a problémát.

A kérdés a következő: Mikor mondhatjuk azt, hogy bizonyos események közül végtelen sok bekövetkezik: a.) egy valószínűséggel, b.) pozitív valószínűséggel. Például mikor mondhatjuk egy (vagy pozitív) valószínűséggel azt, hogy végtelen sok olyan nap van, amelyikben valami jó következik. Ez azt jelenti, hogy bármely nap bízhatunk abban, hogy nem múlt el az összes olyan nap, melyben valami jó történik, tehát érdemes még élni.

Ahhoz, hogy a Borel–Cantelli lemmát megfogalmazzuk szükséges a halmazelmélet nyelvén megfogalmazni azt a tényt, hogy bizonyos események közül végtelen sok következik be, azaz meg kell adni azt az eseményt, melynek a valószínűségére vagyunk kíváncsiak. Legyen adva végtelen sok A_1, A_2, \dots esemény egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Mikor mondhatjuk, hogy ezek közül végtelen sok következik be, vagy formálisan megfogalmazva mely $\omega \in \Omega$ elemi eseményekre mondhatjuk, hogy $\omega \in A_n$ végtelen sok n indexre? Egy ω elemi esemény akkor és csak akkor teljesíti ezt a tulajdonságot, ha minden n -re $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, azaz minden n -re létezik olyan $m \geq n$ index melyre $\omega \in A_m$. Ez akkor és csak akkor történik meg, ha $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Ez azt jelenti, hogy a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény valószínűségére vagyunk kíváncsiak, és erről ad információt a Borel–Cantelli lemma.

Borel–Cantelli lemma: *Legyen adva végtelen sok A_1, A_2, \dots esemény egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. A következő két állítás igaz:*

a.) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, akkor

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0,$$

azaz ebben az esetben egy valószínűséggel csak véges sok A_n esemény következik be.

b.) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, és az $A_n, n = 1, 2, \dots$, események függetlenek, akkor

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1,$$

azaz ebben az esetben egy valószínűséggel végtelen sok sok A_n esemény következik be.

Tegyük néhány megjegyzést ezzel az eredménnyel kapcsolatban. Ha a $P(A_n)$ valószínűségek viszonylag kicsik, ami jelen esetben azt jelenti, hogy az összegük konvergens, akkor csak véges sok A_n esemény következik be 1 valószínűséggel. A másik irányú állításban nemcsak azt követeltük meg, hogy az események valószínűségei legyenek viszonylag nagyok, összegük legyen divergens, hanem azt is, hogy az egyes A_n események legyenek függetlenek. Ebben az esetben viszont erősebb állítást fogalmazhattunk meg. Nemcsak azt állítjuk, hogy ebben az esetben annak valószínűsége hogy végtelen sok A_n esemény következik be pozitív, hanem azt is, hogy ez a valószínűség 1. Ha tehát az A_n események függetlenek, akkor két lehetőség fordulhat elő. Vagy nulla valószínűséggel következik be végtelen sok A_n esemény (ha a valószínűségek összege konvergens) vagy pedig egy valószínűséggel (ha a valószínűségek összege divergens). Közbuló lehetőség nincs.

A b) esetben megfogalmazott eredményben az A_n események függetlensége nagyon fontos feltétel. Ezt a feltételt lehet gyengíteni, de teljesen elhagyni nem lehet. Ezt mutatja az alábbi két példa:

Legyen az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mező a $[0, 1]$ intervallum, rajta a Borel mérhető halmazok σ -algebrája, és a P valószínűségi mérték a Lebesgue mérték.

1. példa. Legyen $A_n = [0, \frac{1}{2}]$ minden $n = 1, 2, \dots$, számra. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = [0, \frac{1}{2}], \text{ ezért } P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \frac{1}{2}.$$

2. példa. Legyen $A_n = (0, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \emptyset, \text{ ezért } P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0.$$

Az első példában egy olyan esetet láttunk, melyben annak a valószínűsége, hogy végtelen sok A_n következik be, $\frac{1}{2}$, tehát sem nem nulla sem nem 1. A második példában egy valószínűséggel csak véges sok A_n esemény következett be, noha teljesült a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ reláció. Természetesen egyik példában sem voltak a tekintett A_n események függetlenek. Ezek a példák mutatják, hogy a Borel–Cantelli tétel b) részében szereplő függetlenség feltétel lényeges. Az gyengíthető ugyan, de teljesen el nem hagyható.