A Valószínűségszámítás I. előadássorozat ötödik előadása.
2001 február 27.

Összefoglaló:

A várható érték tulajdonságainak bizonyításánál szükségünk van az alábbi segédtételre, mely megegyezik a Fazekas könyvben szereplő 2.6 Állítással a 61. oldalon.

Segédtétel. *Legyen ξ egy diszkrét valószínűségi változó egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, mely valamilyen $x_1,x_2,\dots,$ értékeket vesz fel, és legyen $B_k=\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}$, $k=1,2,\dots,$ a ξ valószínűségi változó értékei által meghatározottt teljes eseményrendszer. Legyen C_j, $j=1,2,\dots,$ egy ennél finomabb teljes eseményrendszer, azaz tegyük fel, hogy a $C_j\in\mathcal{A}$ halmazok diszjunktak, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}C_j=\Omega$, és minden C_j halmazhoz tartozik olyan B_k halmaz, melyre $C_j\subset B_k$. Ha $C_j\subset B_k$, akkor rendeljük hozzá a C_j halmazhoz az $y_j=x_k$ számot. A $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kP(B_k)$ és $\sum\limits_{j=1}^{\infty}y_jP(C_j)$ összegek egyszerre abszolut konvergensek, és ha ezek az összegek abszolut konvergensek, akkor*

$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}x_kP(B_k)=\sum_{j=1}^{\infty}y_jP(C_j).$$

Bizonyítás: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kP(B_k)$ összeg abszolut konvergens, azaz létezik olyan $L<\infty$ szám, melyre $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|P(B_k)=L$. Ekkor minden N indexre

$$\sum_{j=1}^{N}|y_j|P(C_j)\le\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|P(B_k)=L,$$

ezért $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|y_j|P(C_j)\le L$, azaz a $\sum\limits_{j=1}^{\infty}y_jP(C_j)$ összeg is abszolut konvergens. Ha a $\sum\limits_{j=1}^{\infty}y_jP(C_j)$ összeg is abszolut konvergens, akkor $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|y_j|P(C_j)\le L<\infty$ alkalmas L számmal, ahonnan tetszőleges N indexre $\sum\limits_{k=1}^{N}|x_k|P(B_k)=\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{j:\,C_j\subset B_k}^{\infty}|y_j|P(C_j)\le\sum\limits_{j=1}^{\infty}|y_j|P(C_j)\le L<\infty$ ahonnan a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kP(B_k)$ összeg is abszolut konvergens.

Ha a fenti sorok abszolut konvergensek akkor minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $N=N(\varepsilon)$ index, hogy $\sum\limits_{k=N}^{\infty}|x_k|P(B_k)<\varepsilon$. Ekkor

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{j:\,C_j\subset B_k}|y_j|P(C_j)<\varepsilon.$$

Legyen $U_k = \{j\colon C_j \subset B_k\}$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra. Ekkor minden U_k halmaznak van olyan véges $V_k = V_k(\varepsilon) \subset U_k$ részhalmaza, melyre

$$|x_k| \sum_{j \in U_k \setminus V_k} P(C_j) \le \varepsilon 2^{-k}$$

Ekkor

$$\left| \sum_{j\colon\, j \in V_k}^{\infty} y_j P(C_j) - \sum_{j\colon\, C_j \subset B_k}^{\infty} y_j P(C_j) \right| \le \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) \quad k = 1, 2, \dots,$$

és

$$\left| \sum_{j\colon\, j \in V_k}^{\infty} y_j P(C_j) - x_k P(B_k) \right| \le \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) \quad k = 1, 2, \dots,$$

ahonnan

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j) - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j \in V_k} y_j P(C_j) \right| \le \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j \in V_k} |y_j| P(C_j) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) \le 2\varepsilon,$$

és

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k) - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j \in V_k} y_j P(C_j) \right| \le \sum_{k=N}^{\infty} |x_k| P(B_k) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) \le 2\varepsilon.$$

Innen

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k) \right| \le 4\varepsilon.$$

Mivel ez az állítás minden $\varepsilon > 0$ számra érvényes, innen következik a Segédtétel állítása.

Az előző előadásban megfogalmazott $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$ reláció bizonyítása.
Ha a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók $x_1, x_2, \dots$ értékeket vesznek fel, akkor tekintsük az $\{\omega\colon \xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k\}$, $j, k = 1, 2, \dots,$ eseményeket. A Segédtétel alapján

$$E\xi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_j P(\xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k),$$

és

$$E\xi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k).$$

E két azonosságot összeadva, és alkalmazva megint a Segédtételt kapjuk, hogy

$$E\xi_1 + E\xi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (x_j + x_k) P(\xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k) = E(\xi_1 + \xi_2),$$

mert az $\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_j, \xi_2(\omega) = x_k\}$, $j, k = 1, 2, \dots$, halmazok egy finomítását adják az $\{\omega\colon \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) = y\}$, ($y = x_j + x_k$ alkalmas x_j és x_k számmal) alakú halmazokból álló particiónak.

Tétel. *Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó, mely bizonyos $x_1, x_2, \dots$ értéket vesz fel és $g(x)$ valós függvény. Ekkor*

$$Eg(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j),$$

feltéve, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j)$ összeg abszolut konvergens.

Bizonyítás: Vezessük be az $x_u \sim x_v$ relációt, ha $g(x_u) = g(x_v)$. Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és az $x_1, x_2, \dots$, értékeket megszámlálható sok $D_1, D_2, \dots$, osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy x_u és x_v akkor kerül ugyanabba az osztályba, ha $x_u \sim x_v$. Definiáljuk a z_k számot úgy, hogy legyen $z_k = g(x_u)$, ha $x_u \in D_k$. Vezessük be továbbá a $B_k = \{\omega\colon \xi(\omega) \in D_k\}$ és $C_j = \{\omega\colon \xi(\omega) = x_j\}$ halmazokat az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor a várható érték definiciója illete a Segédtétel alapján

$$Eg(\xi) = \sum_k z_k P(C_k) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j),$$

feltéve, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j)$ összeg abszolut konvergens.

Tétel *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, diszkrét valószínűségi változók melyek mindegyikére létezik az $E\xi_j$, $1 \le j \le n$ várható érték. Ekkor az $E\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n$ várható érték is létezik, és*

$$E\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n = E\xi_1 E\xi_2 \cdots E\xi_n.$$

Megjegyés: A fent megfogalmazott eredmény rendkívül fontos tulajdonsága a *független* valószínűségi változóknak. A Fazekas könyvben ez az eredmény csak az $n = 2$ esetben van megfogalmazva a 2.21 Tételben a 66. oldalon. Ha jól tudunk számolni független valószínűségi változókkal, akkor az általános eredmény visszavezethető erre a speciális esetre, de egyszerűbbnek láttam közvetlenül az általános esettel foglalkozni.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók $x_1, x_2, \dots,$ értékeket vesznek fel. Ekkor

$$\begin{aligned} E\xi_1 \cdots E\xi_n &= \sum_{j_1=1}^{\infty} x_{j_1} P(\xi_1 = x_{j_1}) \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_n} P(\xi_n = x_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_1} \cdots x_{j_n} P(\xi_1 = x_{j_1}) \cdots P(\xi_n = x_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_1} \cdots x_{j_n} P(\xi_1 = x_{j_1}, \cdots, \xi_n = x_{j_n}), \end{aligned}$$

a ξ_j, $1 \le j \le n$ valószínűségi változók függetlensége miatt, valamint azért mert a fenti sorok mindegyike abszolut konvergens. (Ugyanis abszolut konvergens sorok szorzata is abszolut konvergens.) Viszont a Segédtétel alapján a fenti azonosság jobboldalán szereplő kifejezés $E\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n$, ezért

$$E\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n = E\xi_1 E\xi_2 \cdots E\xi_n.$$

A szórásnégyzet fogalma.

Azt hogy valószínűségi változók körülbelül mekkora értéket vesznek fel az (egyelőre csak diszkrét valószínűségi változók esetén tárgyalt) várható érték méri megfelelő módon. Annak mérésére, hogy mekkora a valószínűségi változó ingadozása a várható értéke körül vezették be a szorásnégyzet (angolul variance) fogalmát. Ennek definiciója a következő:

A szórásnégyzet definiciója: *Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melyre $E\xi^2 < \infty$. Ekkor a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét az*

$$\operatorname{Var} \xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2$$

képlet definiálja. Ha $E\xi^2 = \infty$ akkor a $\operatorname{Var} \xi$ szórásnégyzetet nem definiáljuk vagy azt mondjuk, hogy $\operatorname{Var} \xi = \infty$.

Lemma.

$$\operatorname{Var} \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

Továbbá, $(E\xi)^2 \le E\xi^2$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} 0 \le \operatorname{Var} \xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2 &= E\left(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2\right) \\ &= E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E\xi^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 \end{aligned}$$

a várható érték tulajdonságai miatt. Összehasonlítva a bal és jobboldalt kapjuk a megfogalmazott egyenlőtlenséget.

Megjegyzés: Ha precízek vagyunk felmerülhet a kérdés, teljesen kifogástalan-e a fenti bizonyítás. Az okozhat esetleg problémát, hogy csak akkor definiáltuk a várható értéket, ha a definiáló összeg abszolut konvergens. Ezt viszont csak az $E\xi^2$-ről tettük fel, ugyanakkor az $E\xi$-vel is szabadon számoltunk. Nem okoz-e ez gondot?

Az, hogy a fenti számolás jogos, például a következő módon látható. Vegyen fel a ξ valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ értékeket, és definiáljuk a ξ valószínűségi változó ξ_n közelítéseit, $n = 1, 2, \dots$, a következő módon: $\xi_n(\omega) = \xi(\omega)$, ha $\xi(\omega) = x_k$, $1 \le k \le n$, $\xi_n(\omega) = 0$, ha $\xi(\omega) = x_k$, és $k > n$. Ekkor a $\xi_n(\omega)$ illetve ennek abszolut értékével a $|\xi_n(\omega)|$ valószínűségi változókkal szabadon végrehajthatjuk a fenti számolásokat. Innen következik, hogy $(E|\xi_n(\omega)|)^2 \le E\xi_n^2(\omega) \le E\xi^2(\omega)$. Innen viszont $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $(E|\xi|)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (E|\xi_n(\omega)|)^2 \le E\xi^2(\omega)$. Ez azt jelenti, hogy az $E\xi$ várható értéket meghatározó összeg is abszolut konvergens, és a fenti számolásokat elvégezhetjük.

Feladat:

Minden m valós számra

$$E(\xi - m)^2 = E(\xi - E\xi)^2 + ((E\xi) - m)^2 .$$

Következésképpen

$$\mathrm{Var}\,\xi = \inf_{-\infty<m<\infty} E\left[(\xi - m)^2\right].$$

Lemma. Minden a és b valós számra

$$\mathrm{Var}\,(a\xi + b) = a^2 \mathrm{Var}\,\xi.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(a\xi + b) &= E\left[(a\xi + b) - E(a\xi + b)\right]^2 = E\left[(a\xi + b) - aE(\xi - b\right]^2 \\ &= E\left[a^2(\xi - E\xi)^2\right] = a^2 E(\xi - E\xi)^2 = a^2\mathrm{Var}\,\xi.\end{aligned}$$

A következő eredmény rendkívül hasznos összefüggést ad, ha független valószínűségi változók összegének szórásnégyzetét akarjuk kiszámítani. Hangsúlyozzuk, hogy ebben az eredményben fontos a tekintett valószínűségi változók függetlensége. Később megfogalmazzuk ezen eredmény általánosítását abban az esetben, ha az összeadandók nem feltétlenül függetlenek, és látni fogunk példákat, melyek megoldásában ezt az általánosabb eredményt érdemes alkalmazni.

Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *független valószínűségi változók, akkor*

$$\mathrm{Var}\,(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = \mathrm{Var}\,\xi_1 + \mathrm{Var}\,\xi_2 + \cdots + \mathrm{Var}\,\xi_n.$$

Következmény. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *független valószínűségi változók,* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *valós számok, akkor*

$$\mathrm{Var}\,(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_n\xi_n) = c_1^2\mathrm{Var}\,\xi_1 + c_2^2\mathrm{Var}\,\xi_2 + \cdots + c_n^2\mathrm{Var}\,\xi_n.$$

A Tétel bizonyítása. Vezessük be a $\bar{\xi}_j = \xi_j - E\xi_j$ valószínűségi változókat. Ekkor

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) &= E(\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \cdots + \bar{\xi}_n)^2 \\
&= E\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \cdots + E\bar{\xi}_n^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} E\bar{\xi}_j\bar{\xi}_k \\
&= E\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \cdots + E\bar{\xi}_n^2 = \operatorname{Var}\xi_1 + \operatorname{Var}\xi_2 + \cdots + \operatorname{Var}\xi_n,
\end{aligned}$$

mert $E\bar{\xi}_j\bar{\xi}_k = E\bar{\xi}_j E\bar{\xi}_k = 0$ minden $1 \le j < k \le n$ számra a ξ_j illetve a $\bar{\xi}_j$, $1 \le j \le n$, valószínűségi változók függetlensége miatt.

Feladat:

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fejdobások számának a szórásnégyzetét. Számítsuk ki ezt egyrészt direkt módon felírva és kiszámolva a szórásnégyzetet kifejező összeget másrészt egyszerűbben az előző tétel segítségével.

Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a dobáseredmények összegének a szórásnégyzetét.

Megfogalmazzuk az előző tétel általánosítását, mely lehetővé teszi azt, hogy kiszámoljuk nem feltétlenül független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetét. Ennek érdekében először be kell vezetnünk egy új fogalmat, két valószínűségi változó kovarianciafüggvényét, mely azt méri hogy milyen erős a kapcsolat két valószínűségi változó között.

A kovarianciafüggvény definiciója. *Legyen ξ és η két valószínűségi változó, melyek mindegyikének létezik szórásnégyzete, azaz $E\xi^2 < \infty$ és $E\eta^2 < \infty$. Ekkor a ξ és η kovariancifüggvényét* $\operatorname{Cov}(\xi, \eta)$*-t a*

$$\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = E\left[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\right]$$

kifejezés definiálja. Ha a $E\xi^2 < \infty$ és $E\eta^2 < \infty$ feltételek valamelyike nem teljesül, akkor nem definiáljuk a $\operatorname{Cov}(\xi, \eta)$ *kovariancifüggvényt.*

Megjegyzés: $|(\xi - E\xi)||(\eta - E\eta)| \le \dfrac{|\xi - E\xi|^2}{2} + \dfrac{|\eta - E\eta|^2}{2}$, ahonnan $E|(\xi - E\xi)||(\eta - E\eta)| \le \dfrac{E|\xi - E\xi|^2}{2} + \dfrac{E|\eta - E\eta|^2}{2} < \infty$. Innen következik, hogy az $E\xi^2 < \infty$ és $E\eta^2 < \infty$ feltételek teljesülése esetén a $\operatorname{Cov}(\xi, \eta)$-t definiáló várható érték valóban létezik.

Lemma.

$$\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Következmény. *Ha ξ és η két független valószínűségi változó, akkor* $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = 0$.

Lemma bizonyítása.

$\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = E[\xi\eta - \eta E\xi - \xi E\eta + E\xi E\eta] = E\xi\eta - E\xi E\eta - E\xi E\eta + E\xi E\eta = E\xi\eta - E\xi E\eta.$

Most megfogalmazzuk az alábbi eredményt valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetéről:

Tétel. *Ha $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, melyek mindegyikének létezik szórásnégyzete, akkor*

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right) &= \sum_{j=1}^n \operatorname{Var}\xi_j + 2\sum_{1\le j<k\le n}(E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k)\\ &= \sum_{j=1}^n \operatorname{Var}\xi_j + 2\sum_{1\le j<k\le n}(\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k)\\ &= \sum_{j=1}^n \operatorname{Var}\xi_j + \sum_{1\le j,k\le n,\ j\ne k}(\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k).\end{aligned}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right) &= E\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)^2 - \left(E\sum_{j=1}^n \xi_j\right)^2 = E\left(\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k\right) - \left(\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n E\xi_j E\xi_k\right)\\ &= \sum_{j=1}^n \left(E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2\right) + 2\sum_{1\le j<k\le n}(E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k).\end{aligned}$$

és $E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \operatorname{Var}\xi_j$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = \operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k)$.

Megmutatjuk a (gyakorlaton), hogy a fenti eredmény segítségével viszonylag egyszerűen meg tudjuk oldani a következő két feladatot.

Feladat:

Legyen egy urnában 30 piros és 70 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szörásnégyzetét.
Feldobunk egy dobókockát, majd ezután egy szabályos pénzdarabot annyi alkalommal, amennyi a kockadobás eredménye volt. (Az egyes dobások eredményei függetlenek egymástól.) Számoljuk ki a fejdobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Végül tárgyaltuk azt, hogyan lehet kiszámolni független, diszkrét eloszlású valószínűségi változók összegének az eloszlását, majd definiáltuk diszkrét valószínűségi változók eloszlásainak a konvolucióját, és néhány megjegyzést tetünk ezzel kapcsolatban.

Legyen ξ és η két független, diszkrét valószínűségi változó, melyek valamilyen $x_1,x_2,\dots$ értékeket vesznek fel. Ekkor ezek összege a $\xi+\eta$ valószínűségi változó szintén diszkrét és eloszlását ki tudjuk számolni a következő módon:

$$P(\xi+\eta=x) = \sum_{(x_j,x_k):\ x_j+x_k=x} P(\xi_j=x_j,\eta=x_k) = \sum_{(x_j,x_k):\ x_j+x_k=x} P(\xi_j=x_j)P(\eta=x_k)$$

Ez a képlet egyszerűsödik abban a fontos speciális esetben, ha a független ξ és η valószínűségi változók csak egész értékeket vesznek fel, és még egyszerűbb, ha csak nem negatív egész értékeket vesznek fel. Azt az eredményt, melyet ebben a speciális esetben kapunk fogalmazzuk meg tétel formájában.

Tétel. *Legyen ξ és η két független, egész értékeket felvevő valószínűségi változó. Ekkor a $\xi+\eta$ valószínűségi változó is csak egész értékeket vesz fel, és*

$$P(\xi+\eta=n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi=k)P(\eta=n-k), \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

Ez a formula tovább egyszerűsödik, ha a független ξ és η valószínűségi változók csak nem negatív egész értékeket vesznek fel. Ekkor

$$P(\xi+\eta=n)=\sum_{k=0}^{n} P(\xi=k)P(\eta=n-k), \quad ha\ n\ge 0,$$

és

$$P(\xi+\eta=n)=0, \quad ha\ n<0.$$

Bizonyítás: A tétel első képlete azonnal adódik a tétel előtt tárgyalt általános esetből abban az esetben, ha a valószínűségi véltozók $x_1, x_2, \dots$ értékei egész számok. A második képlet az első képlet következménye, ha észrevesszük, hogy elég csak azon $(k, n-k)$ párokra összegezni, melyekre $P(\xi=k)P(\eta=n-k)\neq 0$. Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, ha ξ és η nem negatív egészeket vesznek fel, akkor az összegezésből kihagyhatjuk azokat a tagokat, melyekre $k<0$ vagy $n-k<0$, azaz $k>n$.

A fenti eredmény miatt érdemes bevezetni a következő definiciót.

Diszkrét, egész értékű eloszlásások konvoluciójának a definiciója. *Legyen*

$$\mathcal{P}=\{p_k\colon k=0,\pm1,\pm2,\dots\} \quad és \quad \mathcal{Q}=\{q_k\colon k=0,\pm1,\pm2,\dots\}$$

két az egész számokon értelmezett diszkrét eloszás, azaz tegyük fel, hogy $p_k\ge 0$, $q_k\ge 0$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k=1$ és $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} q_k=1$. Ekkor a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ eloszlások konvoluciója, az a $\mathcal{R}=\mathcal{P}*\mathcal{Q}=\{r_n\colon n=0,\pm1,\pm2,\dots\}$ eloszlás, melyre

$$r_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k q_{n-k}, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

Abban a speciáis esetben, ha $p_k=0$ és $q_k=0$ $k<0$ esetén, akkor $r_n=0$ $n<0$ esetén, és

$$r_n=\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}, \quad n=0,1,2,\dots.$$

Érdemes a következő észrevételt tenni. Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két függvény, melyek hatványsorba fejthetőek, azaz,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

ha $-A < x < A$ valamilyen $A > 0$ számmal. Ekkor az $f(x)g(x)$ szorzat is sorba fejthető, azaz

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

(ugyanabban a $-A < x < A$ intervallumban), és

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vegyük észre, hogy a fenti hatványsorokban szereplő a_k, b_k és c_n együtthatók között hasonló reláció érvényes mint ami a konvolució definiciójában szerepelt. Ezekívül érdemes tudni a következő analízisben bizonyított eredményeket.

a.) Ha az $f(x)$ függvény hatványsorba fejthető, azaz $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ valamilyen $-A < x < A$ intervallumon, $A > 0$, akkor az $f(x)$ függvény értékei a $-A < x < A$ intervallumon meghatározzák az a_n együtthatókat. (Sőt azok explicit módon kiszámíthatóak az $n!a_n = \left. \dfrac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0}$ képlet segítségével.)

b.) Ha $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots,$ függvényeknek egy olyan sorozata melyek mindegyike előállítható $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k,n} x^k$ hatványsor alakban valamilyen $-A < x < A$, $A > 0$ intervallumon, ahol az $A > 0$ szám nem függ az n indextől, továbbá létezik az $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték minden $-A < x < A$ számra, akkor az $f(x)$ határfüggvény is hatványsorba fejthető $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alakban a $-A < x < A$ intervallumon. Továbbá $a_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_{k,n}$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ együtthatóra.

Később látni fogjuk, hogy a hatványsorok fent említett tulajdonságai jól használhatóak bizonyos valószínűségi vizsgálatokban.