A Valószínűségszámítás I. előadássorozat nyolcadik előadása.
2001 március 20.

Összefoglaló:

Valószínűségi változók eloszlásfüggvénye és várható értéke. *(folytatás)*

A Lebesgue integrál teljesíti a Riemann integrálra érvényes additivitási tulajdonság következő természetes általánosítását:

$$\int (c_1\xi_1(\omega) + c_2\xi_2(\omega))\, dP(\omega) = c_1 \int \xi_1(\omega) dP(\omega) + c_2 \int \xi_2(\omega) dP(\omega)$$

minden (integrálható) ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változóra és valós c_1, c_2 számra. Ennek az azonosságnak a következménye (valójában átfogalmazása) a következő

Tétel. *Ha két ξ_1, ξ_2 valószínűségi változónak (melyek ugyanazon a valószínűségi mezőn vannak definiálva) létezik várható értéke, c_1 és c_2 két valós szám, akkor a $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ kifejezésnek is létezik várható értéke, és*

$$E\,(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1 E\xi_1 + c_2 E\xi_2.$$

Megjegyzés: Ez az eredmény azt állítja, hogy az általános esetben is érvényes a diszkrét valószínűségi változókról szóló eredmény, mely véletlen összegek várható értékének additivitását fejezi ki. Ebben az esetben sem kell megkövetelni a valószínűségi változók (általános esetben még nem tárgyalt) függetlenségét.

Jegyezzük meg, hogy a várható érték (Lebesgue integrál definiciójából) könnyen látható, hogy amennyiben egy $\xi(\omega)$ valószínűségi változóra teljesül a $P(\xi(\omega) \ge 0) = 1$ feltétel, akkor $E\xi(\omega) \ge 0$. Innen következik, hogy amennyiben két $\xi(\omega)$ és $\eta(\omega)$ valószínűségi változóra teljesül, hogy $P(\xi(\omega) \ge \eta(\omega)) \ge 0$, akkor $E\xi(\omega) \ge E\eta(\omega)$. Valóban, ekkor $E\xi(\omega) - E\eta(\omega) = E\,(\xi(\omega) - \eta(\omega)) \ge 0$. Ennek az észrevételnek egyik következménye az alábbi Markov egyenlőtlenségnek nevezett reláció.

Markov egyenlőtlenség. *Ha $\xi(\omega)$ nem negatív valószínűségi változó, azaz $P(\xi(\omega) \ge 0) = 1$, akkor*

$$P(\xi(\omega) \ge x) \le \frac{E\xi(\omega)}{x} \quad \textit{minden } x > 0 \textit{ számra.}$$

Bizonyítás: Definiáljuk a ξ valószínűségi változó alábbi $\eta(\omega)$ csonkítottját:

$$\eta(\omega) = \begin{cases} x & \text{ha } \xi(\omega) \ge x \\ 0 & \text{ha } 0 \le \xi(\omega) \le x \end{cases}$$

Ekkor $P(\xi(\omega) \ge \eta(\omega)) = 1$, ezért $E\xi(\omega) \ge E\eta(\omega) = xP(\xi(\omega) \ge x) = xP(\eta(\omega) \ge x)$, ahonnan következik az állítás.

Definiáljuk általános esetben is valószínűségi változók szórásnégyzetét.

Szórásnégyzet definiciója. *Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melyre $E\xi^2 < \infty$. Ekkor e valószínűségi változó szórásnégyzete*

$$\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2$$

(Ha $E\xi^2 = \infty$, akkor vagy nem definiáljuk a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét, vagy azt mondjuk, hogy $\operatorname{Var}\xi(\omega) = \infty$*.*

Lemma.

$$\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 .$$

Bizonyítás:

$$\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2 = E\left(\xi^2 - 2\xi E\xi + \left(E\xi\right)^2\right) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + \left(E\xi\right)^2 = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 .$$

Általában, a szórásnégyzet tulajdonságainak a bizonyítása csak a várható érték tulajdonságait használja. Ezért a diszkrét valószínűségi változók esetében érvényes

$$\operatorname{Var}\left(a\xi + b\right) = a^2 \operatorname{Var}\xi$$

azonosságot hasonlóan lehet bizonyítani az általános esetben.

Feladat:

Általános valószínűségi változók esetében is érvényes a

$$\inf_{-\infty < M < \infty} E(\xi - M)^2 = \operatorname{Var}\xi$$

azonosság.

Megfogalmazzuk és bebizonyítjuk az alábbi Csebisev egyenlőtlenségnek nevezett állítást.

Csebisev egyenlőtlenség. *Minden ξ valószínűségi változóra, melyre $E\xi^2 < \infty$*

$$P(|\xi - E\xi| \geq x) \leq \frac{\operatorname{Var}\xi}{x^2} \quad \textit{minden } x \geq 0 \textit{ számra.}$$

Bizonyítás:

$$P(|\xi - E\xi| \geq x) = P((\xi - E\xi)^2 \geq x^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{x^2} = \frac{\operatorname{Var}\xi}{x^2}$$

a Markov egyenlőtlenség alapján.

Megjegyzés: A Csebisev egyenlőtlenség azért hasznos, mert a benne szereplő szórásnégyzet sok érdekes esetben könnyen kiszámolható. Felmerülhet az a kérdés, hogy a Csebisev egyenlőtlenség mennyire éles. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

Az előző előadáson kimondott fontos tételnek nevezett eredmény, illetve annak általánosításából következik, hogy egy valószínűségi változónak, illetve egy valószínűségi változó függvényének a várható értékét ki lehet számítani csak a valószínűségi változó eloszlásfüggvényének az ismeretében.

Gyakorlati szempontból, annak érdekében, hogy a leggyakrabban előforduló esetekben jobban tudjunk számolni, érdemes bevezetni egy eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényének a definicióját. Ez lehetővé teszi, hogy a problémákban felmerülő és sokszor kényelmetlenül kezelhető Lebesgue integrálokat átírjuk mint (közönséges) Riemann integrálokat.

Sűrűségfüggvény definiciója. *Egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek az $f(u)$, $-\infty < u < \infty$, függvény sűrűségfüggvénye, ha minden $-\infty < x < \infty$ számra teljesül az*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

azonosság.

Megjegyzés: Többször fogunk beszélni egy valószínűségi változó sűrűségfüggvényéről is. Ez azt jelenti, hogy e valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a sűrűségfüggvényét tekintjük.

Tétel. *Ha egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, akkor ez teljesíti minden $g(\cdot)$ függvényre a következő azonosságot:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)du.$$

Ez az azonosság úgy értendő, hogy az azonosság két oldalán szereplő kifejezés egyszerre létezik vagy nem létezik, ha mind a két kifejezést mint Lebesgue integrált értelmezzük. Ha a jobboldalon szereplő integrál létezik mint (közönséges) Riemann integrál, akkor ez az integrál tekinthető úgy is mint (egy a Riemann integrál értékével megegyező) Lebesgue integrál. Tehát az azonosság ebben a fontos speciális esetben is érvényes.

Annak érdekében, hogy megértsük, hogyan tudjuk egy eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényét kiszámítani, idézzük fel a klasszikus analízis egyik alapvető eredményét, a Newton–Leibniz formulát.

Newton–Leibniz formula. *Legyen $F(x)$ folytonos függvény egy $[a, b]$ véges intervallumon, mely véges sok pont kivételével folytonosan deriválható. Legyen $f(u) = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ minden pontban, ahol az $F(\cdot)$ differenciálható. Ekkor $F(x) - F(a) = \int_a^x f(u)\,du$ minden*

$a \le x \le< b$ számra. Továbbá, ha a fenti feltétel teljesül minden véges $[a,b]$ intervallumban, és létezik a $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ határérték, akkor $F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.

Megfordítva, ha $f(u)$, (pontosabban annak abszolut értéke) integrálható függvény egy $[a,b]$ intervallumban, és $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$, $a \le x \le b$, akkor $f(u) = \left.\dfrac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ (majdnem) minden $a \le u \le b$ pontban. Ha az $f(u)$ függvény integrálható az egész számegyenesen, akkor a fenti állítás igaz $a = -\infty$ választással is.

Megjegyzés 1: A Newton–Leibniz formula jelentősége számunkra az, hogy eszerint az eredmény szerint a sűrűségfüggvény egyenlő az eloszlásfüggvény deriváltjával. Megfordítva, a sűrűségfüggvény ismeretében meg tudjuk határozni az eloszlásfüggvényt. Annak értéke az x pontban megegyezik a sűrűségfüggvény integráljával a $[-\infty, x]$ intervallumban.

Megjegyzés 2: A mértékelméletben bebizonyították a Newton–Leibniz formula élesebb formáját is. Pontosan leírták azon függvények osztályát, az úgynevezett abszolut folytonos függvényeket, melyekre igaz, hogy a függvény egyenlő a deriváltjának az integráljával. Az általunk kimondott eredmény csak egy elégséges feltételt ad arra, hogy egy $F(\cdot)$ függvény teljesítse ezt a tulajdonságot. Viszont ez az eredmény alkalmazható a gyakorlatban előforduló feladatok majdnem mindegyikére. A kimondott tételben megengedtük, hogy az $F(\cdot)$ függvény néhány pontban ne legyen differenciálható. Ezt azért tettük, hogy ne zárjunk ki néhány érdekes esetet. Ilyen eset például a következő $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény: $F(x) = 0$, ha $x \le 0$, $F(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, és $F(x) = 1$, ha $x \ge 1$. Ennek az eloszlásfüggvénynek a sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, melyre $f(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, és $f(u) = 0$ különben. Ebben az esetben az $F(\cdot)$ függvény folytonosan deriválható mindenütt, kivéve az $x = 0$ és $x = 1$ pontot.

Megjegyzés 3: A Newton–Leibniz formula második részében megfogalmazott állítás szerint egy $f(\cdot)$ függvény integráljának a deriváltja csak *majdnem* mindenütt egyezik meg az eredeti $f(\cdot)$ függvénnyel. Valóban, kissé óvatosabban kell megfogalmazni az állításokat, mert ha például egy függvényt véges sok pontban megváltoztatunk, akkor annak integrálja megegyezik az eredeti függvény integráljával. Ez azt jelenti, hogy nem várhatjuk azt, hogy egy függvény integráljának a deriváltja minden pontban megegyezzen az eredeti függvénnyel. Viszont ez az állítás igaz *majdnem minden* pontban. Azt, hogy mit jelent a ,,majdnem minden” kitétel pontosan elmagyarázzák a mértékelméletben, de ez nem témája a mostani előadásnak.

Az eloszlásfüggvényekhez hasonlóan pontosan jellemezni lehet a sűrűségfüggvényeket. Ezt a jellemzést adja meg az alábbi tétel.

Tétel. *Egy $f(\cdot)$ (mérhető) függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas eloszlásfüggvénynek, ha $f(u) \ge 0$ majdnem minden $-\infty < u < \infty$ számra, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = 1$.*

Ezt a tételt nem nehéz bebizonyítani néhány alapvető mértékelméleti eredmény segítségével, de most elhagyjuk a bizonyítást. Külön tételben megfogalmazzuk azt az eredményt, mely megadja, hogyan lehet kiszámolni egy valószínűségi változó várható értékét a valószínűségi változó eloszlás vagy sűréségfüggvényének az ismeretében. Ez közvetlen következménye néhány korábban megfogalmazott eredménynek.

Tétel. *Jelölje $F(\cdot)$ illetve $f(\cdot)$ egy ξ valószínűségi változó eloszlás illetve sűrűségfüggvényét. Legyen $g(\cdot)$ mérhető függvény a számegyenesen. Ekkor*

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} uF(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)\,du$$

és

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)\,du$$

Feladat:

Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $a\xi + b$ és ξ^2 valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Néhány fontos folytonos eloszlás.

a.) *Normális eloszlásfüggvény.*

Bevezetjük a standard normális eloszlásfüggvény definicióját. Későbbi eredményekből fog kiderülni, hogy ez az eloszlás miért játszik fontos szerepet a valószínűségszámításban.

A standard normális eloszlás definiciója. *A $\Phi(x)$ standard normális eloszlás az az eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye a $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$ függvény.*

E definició helyességének igazolásához meg kell mutatni, hogy a fent definiált $\varphi(\cdot)$ függvény valóban sűrűségfüggvény. Ennek érdekében be kell bizonyítani a következő eredményt.

Tétel.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 1.$$

Bizonyítás. Vezessük be az $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$ jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} re^{-r^2}\,dr\,d\varphi = \int_0^{\infty} re^{-r^2/2}\,dr = \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} = 1. \end{aligned}$$

Ebben a számolásban az I^2 mennyiséget kifejező az (u,v) térben megadott kettős integrált kifejeztük mint az (r,φ) polárkoordinátarendszerben, $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$,

$0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, kifejezett integrált. Ezen számolás során felhasználjuk, hogy a polárkkoordináta rendszerbe való áttérést leíró transzformáció Jacobianja r, azaz formálisan $du\,dv = r\,dr\,d\varphi$. Ezért jelenik meg egy r szorzó az integrálban a polárkoordinátarendszerbe való áttéréskor. Ha lesz időnk később elmagyarázom ennek az integráltranszformációról szóló eredménynek a szemléletes tartalmát.

Megmutatjuk, hogy egy standard normális eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke nulla, szórásnégyzete 1. Ez az oka, a standard jelzőnek a standard normális eloszlás definiciójában.

Valóban $E\xi = 0$, mert $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$, és ez az integrál nulla, mert az integrandus páratlan függvény. Ezután parciális integrálással kapjuk $f(x) = x$ és $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right)$ választással, hogy

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2}\,dx = \left[-\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

Innen $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1$.

Feladat:
Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, m, σ valós számok, akkor az $\sigma\xi + m$ valószínűségi változó várható értéke m szórásnégyzete σ^2, sűrűségfüggvénye pedig $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\sigma|} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

A fenti feladat eredménye alapján egy valószínűségi változót akkor nevezünk normális eloszlásúnak, ha van sűrűségfüggvénye, és az $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$ alakban adható meg alkalmas m és $\sigma > 0$ számokkal.

Feladat:
Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor$E\xi^{2k-1} = 0$ $E\xi^{2k} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra.

b.) *Egyenletes eloszlásfüggvény.*

Egyenletes eloszlásfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású egy $[a, b]$ intervallumban, $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye $f(u) = \frac{1}{b-a}$, ha $a \le u \le b$, és $f(u) = 0$ egyébként.*

Kiszámítjuk egy az $[a, b]$ intervallumban egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

$$E\xi = \int_a^b u \frac{1}{b-a}\,du = \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2},$$

$$\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - \frac{b-a}{2}\right)^2 = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} u^2\,du$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = \frac{2}{3(b-a)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

c.) *Exponenciális eloszlásfüggvény.*

Exponenciális eloszlásfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, $\lambda > 0$, ha eloszlásfüggvénye, $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x < 0$. Ezzel ekvivalens jellemzés: Egy valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, ha létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, és az $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, ha $u \ge 0$, $f(u) = 0$, ha $u \le 0$ alakú.*

Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty u\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ue^{-u}\,du = \frac{1}{\lambda}\left(\left[-ue^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\right) = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty u^2\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda^2}\left(\left[u^2e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2ue^{-u}\,du\right) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Feladat:

Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait.

Feladat:

Mutassuk meg, hogy egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y|\xi > y) = P(\xi > x)$$

minden $x \ge 0$ és $y \ge 0$ számra.

Nem kötelező házi feladat:

Ha egy ξ valószínűségi változó teljesűti az örökifjú tulajdonságot, akkor az exponenciális eloszlású.

Ezenkívül megbeszéltük az örökifjú tulajdonság szemléletes tartalmát. Tekintsünk egy személyt vagy tárgyat melynek élettartama véletlen ξ valószínűségi változó. Tekintsük a $\xi + y$ valószínűségi változó feltételes eloszlását azon feltétel mellett, hogy $\xi > y$, azaz azt milyen valószínűséggel fog az a személy vagy tárgy legalább még x ideig élni, feltéve, hogy megélte az y időpontot. Ha ez a feltételes eloszlás nem függ az y értéktől, akkor azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó teljesíti az örökifjú tulajdonságot. A fenti feladatban ezt a tulajdonságot fogalmaztuk meg formálisan.

Feladat:

Mutassuk meg, hogy létezik olyan ξ valószínűségi változó teljesíti a következő szuper örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y|\xi > y) > P(\xi > x)$$

minden $x > 0$ és $y > 0$ számra.

Többváltozós eloszlásfüggvények, és valószínűségi változók függetlensége.

Megtárgyaljuk az eloszlásfüggvény többdimenziós változatát. E fogalom bevezetése után lehet természetes módon definiálni valószínűségi változók függetlenségét. Az itt szereplő fogalmak és bizonyítások hasonlóak a korábban tárgyalt egydimenziós esethez. Ezen eredmények bizonyítását csak nagyon vázlatosan fogom ismertetni. Vázolni fogom azokat a mértékelméleti eredményeket, melyeket a bizonyítások felhasznaálnak. Elsősorban a fogalmak és eredmények tisztességes leírására fogok törekedni.

Többdimenziós eloszlásfüggvény definiciója. *Legyen adva k valós értékű $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ezek (együttes) eloszlásfüggvénye az*

$$F(x_1, \dots, x_k) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k),$$

k változós függvény, ahol $-\infty < x_j < \infty$ minden $1 \le j \le k$ indexre.

Az előző előadásban megfogalmaztuk az egydimenziós eloszlásfüggvények jellemzését a Tétel A-ban és az azt megelőző Lemmában. Érvényes ezeknek az természetes többdimenziós változata is. Annak érdekében, hogy megértsük hogyan szólnak ezek az eredmények azt kell tisztázni, hogy a lemmában szereplő a) feltételnek, amelyik az eloszlásfüggvény monotonítását mondja ki, hogyan szól a több-dimenziós megfelelője.

Ezt megértendő tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{K} = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_k, b_k)$ alakú téglatestet, $-\infty < a_j < b_j < \infty$, $j = 1, \dots, k$, a k dimenziós térben. Világos, hogy tetszőleges $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ k-dimenziós valószínűségi változóra teljesül a

$$P\left((\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega)) \in \mathbf{K}\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{\omega\colon a_j \le \xi_j(\omega) < b_j\}\right) \ge 0$$

tulajdonság. Azt állítjuk, hogy az ilyen alakú események valószínűsége viszonylag egyszerűen kifejezhető a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor $F(x_1, \dots, x_k) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k)$ eloszlásfüggvényének a segítségével, és az így kapott kifejezés nem-negatív volta az előbb említett a) feltétel megfelelője a több-dimenziós esetben.

Annak érdekében, hogy ezt a feltételt megfogalmazzuk, a következő állítást kell igazolni. Tekintsük egy $\mathbf{K} = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_k, b_k)$ alakú téglatestet, és ennek csúcspontjait, azaz az olyan $(u_1, \dots, u_k)$ pontokat, melyek koordinátái az a_j vagy b_j számok. Annak valószínűsége, hogy egy $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlású $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor a $\mathbf{K} = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_k, b_k)$ téglatestbe esik kifejezhető mint az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénynek a téglatest csúcspontjaiban felvett értékeinek alkalmas lineáris kombinációja. Pontosabban,

$$P((\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbf{K}) = \sum_{\substack{u_j = \, a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\chi(u_1, \dots, u_k)} F(u_1, \dots, u_k),$$

ahol $\chi(u_1, \dots, u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1, \dots, u_k$ sorozatban. Az $F(\cdot)$ függvény monotonitásának az több-dimenziós esetben az felel meg, hogy a fent felírt azonosság jobboldalán szereplő kifejezés nem-negatív. Az egyszerűség kedvéért ezt az azonosságot csak $k = 2$ esetben ellenőrizzük.

Ekkor azt kell megmutatni, hogy $P(a_1 \le \xi_1 < b_1, a_2 \le \xi_2 < b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$. Viszont $F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) = P(\xi_1 < b_1, a_2 \le \xi_2 < b_2)$, és $F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2) = P(\xi_1 < a_1, a_2 \le \xi_2 < b_2)$. Ezt a két azonosságot kivonva egymásból kapjuk a kívánt állítást.

Feladat:

Legyen egy (ξ_1, ξ_2) véletlen vektor eloszlása az $F(x_1, x_2) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2)$ függvény, $-\infty < a_1 < b_1 < \infty$, $-\infty < a_2 < b_2 < \infty$ valós számok. Fejezzük ki az $F(x_1, x_2)$ eloszlásfüggvény segítségével a $P(a_1 \le \xi_1 < b_1, a_2 \le \xi_2 < b_2)$, $P(a_1 \le \xi_1 \le b_1, a_2 \le \xi_2 \le b_2)$ és $P(a_1 < \xi_1 < b_1, a_2 < \xi_2 < b_2)$ valószínűségeket.

Feladat:

Legyen az $F(x_1, \dots, x_k) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k)$ függvény a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor eloszlásfüggvénye. Mutassuk meg a várható érték additivitásának felhasználásával (és alkalmas halmazok indikátorfüggvényének a bevezetésével), hogy

$$P((a_j \le \xi_j < b_j, \ 1 \le j \le k) = \sum_{\substack{u_j = \, a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\chi(u_1, \dots, u_k)} F(u_1, \dots, u_k),$$

ahol $\chi(u_1, \dots, u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1, \dots, u_k$ sorozatban.

Be lehet látni, hogy az előző előadáson megfogalmazott Tétel A-nak és Lemmának igaz a következő több-dimenziós általánosítása.

Tétel. *Egy $F(u_1, \dots, u_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye alkalmas $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változóknak valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ha ez az F függvény teljesíti a következő (i)—(iv) tulajdonságokat.*

(i) $F(u_1, \dots, u_k)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

(ii) $\displaystyle\lim_{\substack{u_j \to \infty \\ \text{minden } j=1,\dots,k \text{ számra}}} F(u_1, \dots, u_k) = 1.$

(iii) $\lim\limits_{\substack{u_j\to-\infty \\ \text{valamely } 1\le j\le k \text{ számrra}}} F(u_1,\dots,u_k)=0$. *(Ez úgy értendő, hogy az összes u_s, $1\le s\le k$, $s\neq j$ koordinátát rögzítjük, és $u_j\to-\infty$.)*

Végül definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K}=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_k,b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K})=\mu_F(\mathbf{K})=\sum_{\substack{u_j=\,a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}}(-1)^{\chi(u_1,\dots,u_k)}F(u_1,\dots,u_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(u_1,\dots,u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1,\dots,u_k$ sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K})\ge 0$ *minden* $\mathbf{K}$ *téglatestre.*

A fenti tétel bizonyításának legnehezebb része annak megmutatása, hogy ha az $F(x_1,\dots,x_k)$ függvény teljesíti az (i)–(iv) tulajdonságokat, akkor léteznek olyan $\xi_1,\dots,\xi_k$ valószínűségi változók alkalmas $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, melyek (együttes) eloszlásfüggvénye az $F(x_1,\dots,x_k)$ függvény. Ennek bizonyítása az előző előadás Tétel B eredményének következő állításán alapul:

Az előző előadás Tétel B eredményének általánositása. *Legyen $F(x_1,\dots,x_k)$ olyan k változós függvény, amelyik teljesíti az (i)–(iv) tulajdonságokat. Ekkor létezik és egyértelműen meghatározott egy olyan μ_F Stieltjes mérték az R^k k-dimenziós tér Borel mérhető halmazainak $\mathcal{B}^k$ σ-algebráján, amelyik nem negatív σ-additiv halmazfüggvény ezen a σ-algebrán, $\mu_F(R^k)=1$, és*

$$\mu_F(\{u_1,\dots,u_k\}\colon u_j<x_j,\ 1\le j\le k\})=F(x_1,\dots,x_k)$$

minden $x_1,\dots,x_k$ valós számra.

E tétel segítségével a következő módon konstruálhatunk $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változókat. Legyen $(\Omega,\mathcal{A},P)=(R^k,\mathcal{B}^k,\mu_F)$, ahol $\mathcal{B}^k$ jelöli a Borel σ-algebrát az R^k k-dimenziós térben, és μ_F az előző tételben jellemzett az F eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mérték. Ebben a valószínűségi mezőben az $(x_1,\dots,x_k)\in R^k$ pontok alkotják az ω elemi eseményeket. A $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ valószínűségi változókat a következő módon definiáljuk. Legyen $\xi_j(x_1,\dots,x_k)=x_j$, $1\le j\le k$. Ezen valószínűségi változók együttes eloszlása az $F(x_1,\dots,x_k)$ függvény.

Érvényes továbbá az előző előadáson megfogalmazott eredmények következő többdimenziós változata, mely lehetővé teszi azt, hogy kiszámítsuk véletlen vektorok függvényeinek a várható értékét.

Tétel. *Legyenek $\xi_1(\omega),\dots,\xi_k(\omega)$ valószínűségi változók egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, melyeknek $F(x_1,\dots,x_k)=P(\xi_1(\omega)<x_1,\dots,\xi_k(\omega)<x_k)$, az eloszlásfüggvénye. Legyen $g(x_1,\dots,x_k)$ tetszőleges (mérhető) k-változós függvény, és definiáljuk az $\eta(\omega)=g(\xi_1(\omega),\dots,\xi_k(\omega))$ valószínűségi változót. Ekkor*

$$E\eta(\omega)=Eg(\xi_1(\omega),\dots,\xi_k(\omega))=\int g(x_1,\dots,x_k)\mu_F(\,dx_1,\dots,\,dx_k),$$

ahol a fenti integrál Lebesgue–Stieltjes integrált jelöl az F függvény által meghatározott μ_F Stieltjes mérték szerint. Ez a formula akkor érvényes, ha

$$\int |g(x_1,\dots,x_k)|\mu_F(\,dx_1,\dots,\,dx_k) < \infty.$$

Ellenkező esetben az $E\eta$ várható értéket nem definiáltuk.

Az egy-dimenziós esethez hasonlón a több-dimenziós esetben is érdemes bevezetni eloszlásfüggvények sűrűségfüggvényének a fogalmát. Amennyiben valamely valószínűségi változók együttes eloszlásának van sűrűségfüggvénye, akkor ezen valószínűségi változók valamely függvényének a várható értékét ki lehet számolni ezen sűrűségfüggvény szerinti alkalmas integrál segítségével. Az így kapott formula általában jobban használható konkrét feladatokban mint az eloszlások szerinti integrál. Megadom a több-dimenziós sűrűségfüggvény definicióját és az előbb jelzett eredmény pontos megfogalmazását.

Több-dimenziós eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényének definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy $F(x_1,\dots,x_k)$ többváltozós eloszlásfüggvénynek létezik $f(u_1,\dots,u_k)$ sűrűségfüggvénye, ha teljesül az*

$$F(x_1,\dots,x_k) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_k} f(u_1,\dots,u_k)\,du_1\dots du_k$$

azonosság minden $-\infty < x_j < \infty$, $1 \le j \le k$ számra.

Tétel. *Ha $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ valószínűségi változók $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvényének létezik $f(u_1,\dots,u_k)$ sűrűségfüggvénye, akkor ez teljesíti minden $g(\cdot)$ k-változós (mérhető) függvényre a következő azonosságot:*

$$\begin{aligned} Eg(\xi_1,\dots,\xi_k) &= \int g(u_1,\dots,u_k)\mu_F(\,du_1,\dots,\,du_k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(u_1,\dots,u_k)f(u_1,\dots,u_k)\,du_1\dots\,du_k, \end{aligned}$$

ahol μ_F jelöli az F eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mértéket. Ez az azonosság úgy értendő, hogy az annak két oldalán szereplő kifejezés egyszerre létezik vagy nem létezik, ha mind a két kifejezést mint Lebesgue integrált értelmezzük. Ha a jobboldalon szereplő integrál létezik mint (közönséges) Riemann integrál, akkor ez az integrál tekinthető úgy is mint (egy a Riemann integrál értékével megegyező) Lebesgue integrál. Tehát az azonosság ebben a fontos speciális esetben is érvényes.

Az egydimenziós esethez hasonlóan a többdimenziós sűrűségfüggvényeket is lehet jellemezni. Igaz a következő tétel.

Tétel. *Egy k-változós $f(u_1,\dots,u_k)$ függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas k-dimenziós eloszlásfüggvénynek, ha $f(u_1,\dots,u_k) \ge 0$ majdnem minden $(u_1,\dots,u_k)$ pontban, és*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(u_1,\dots,u_k)\,du_1\dots\,du_k = 1.$$