A Valószínűségszámítás I. előadássorozat kilencedik előadása.

2001 március 27.

Összefoglaló:

A többdimenziós sűrűségfüggvények bevezetése után definiáljuk a több-dimenziós tér halmazaira koncentrált egyenletes eloszlást. Ezután határozzuk meg az egyenletes eloszlást néhány egyszerű esetben.

Többdimenziós halmazokra koncentrált egyenletes eloszlás definiciója. *Legyen adva egy $A \subset R^k$ (Borel mérhető) halmaz a k-dimenziós téren, melynek Lebesque mértéke teljesíti a $\lambda(A) > 0$ feltételt. Az A-halmazon definiált egyenletes eloszlás az a P valószínűségi mérték az R^k tér Borel mérhető részhalmazain, melyre $P(B) = \dfrac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(A)}$ minden Borel mérhető halmazra a k-dimenziós téren. Másképp megfogalmazva, az A halmazra koncentrált egyenletes eloszlás az az eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye $f(u_1, \dots, u_k) = \dfrac{1}{\lambda(A)}$, ha $(u_1, \dots, u_k) \in A$, és $f(u_1, \dots, u_k) = 0$, ha $(u_1, \dots, u_k) \notin A$.*

Adjuk meg a $[0, 1 \times \cdots \times [0, 1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét.

b.) Tekintsük a síkon a $(0, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ csúcspontok által meghatározott háromszögön az egyenletes eloszlást. Adjuk meg ennek sűrűségfüggvényét.

Független valószínűségi változók és szorzatuk várható értéke.

Valószínűségi változók függetlenségének a definiciója. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek, ha minden $x_1, \dots, x_n$ valós számra*

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

Későbbi vizsgálatok érdekében vezessük be ennek a fogalomnak a többdimenziós változatát.

Többdimenziós valószínűségi változók függetlenségének a definiciója. *Legyenek $\xi^{(1)} = (\xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,k})$, ..., $\xi^{(n)} = (\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,k})$, k-dimenziós valószínűségi változók (vektorok) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi vektorok függetlenek, ha minden $x^{(1)} = (x_{1,1}, \dots, x_{1,k})$, ..., $x^{(n)} = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k})$, k-dimenziós vektorra*

$$\begin{aligned} &P\left(\xi_{1,1} < x_{1,1}, \dots, \xi_{1,k} < x_{1,k}, \ \dots, \ \xi_{n,1} < x_{n,1}, \dots, \xi_{n,k} < x_{n,k}\right) \\ &\quad = P\left(\xi_{1,1} < x_{1,1}, \dots, \xi_{1,k} < x_{1,k}\right) \cdots P\left(\xi_{n,1} < x_{n,1}, \dots, \xi_{n,k} < x_{n,k}\right). \end{aligned}$$

Megjegyzés: Többdimenziós valószínűségi változók függetlenségének a definiciójában semmilyen függetlenségi feltevést nem tettünk az egyes $\xi^{(j)} = (\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,k})$, $1 \le j \le k$, vektorok koordinátái között.

Független valószínűségi változókkal való számolást megkönnyíti a mértékelmélet egyik alapvető eredménye, a Fubini tételt. Ennek megfogalmazása előtt teszünk néhány megjegyzést.

A Fubini tétel a következő, a területi (Riemann–)integrálról szóló eredménynek általánosítása általános Lebesgue integrálokra.

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\left(\int f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

minden integrálható $f(\cdot,\cdot)$ függvényre. Ez az eredmény azt jelenti, hogy egy kétváltozós függvény területi integrálját úgy is kiszámolhatjuk, hogy először rögzítjük az egyik paramétert, (melyet y-nal jelöltünk,) és kiszámítjuk az így kapott egyváltozós integrált. Ezután az első lépésben rögzített paraméter szerint integrálva az így kapott függvényt, megkapjuk a területi integrál értékét. Ez azt jelenti, hogy a területi integrál kiszámítható két egyszeres integrál szukcesszív alkalmazásának a segítségével.

A Fubini tétel megfogalmazása előtt fogalmazzuk meg a következő eredményt.

Feladat:

Legyenek $F_1(\cdot)$, ..., $F_k(\cdot)$ eloszlásfüggvények a számegyenesen, és definiáljuk az $F(x_1,\dots,x_k) = F_1(x_1)\cdots F_k(x_k)$ függvényt. Ez az $F(x_1,\dots,x_k)$ függvény k-változós eloszlásfüggvény.

Részletesebben kifejtve a következőt állítjuk. A hetedik és nyolcadik előadásban megadtuk a szükséges és elégséges feltételét annak hogy egy egydimenziós illetve többdimenziós függvény eloszlásfüggvény függvény legyen. Azt állítjuk, hogy ha az $F_j(\cdot)$, $1\le j\le k$, függvények teljesítik az (egydimenziós) eloszlásfüggvény jellemzését leíró tulajdonságokat, akkor az $F(x_1,\dots,x_k) = F_1(x_1)\cdots F_k(x_k)$ függvény teljesíti a többdimenziós eloszlásfüggvény eloszlását leíró tulajdonságokat.

Ha $F_j(\cdot)$, $1\le j\le k$, egydimenziós eloszlásfüggvények, akkor tekinthetjük az $F(x_1,\dots,x_k) = F_1(x_1)\cdots F_k(x_k)$ k-változós eloszlásfüggvényt, illetve az általa meghatározott $\mu_F = \mu_{(F_1,\dots,F_k)}$ Stieltjes mértéket a k-dimenziós téren. Az irodalomban általános szokás, hogy az előbb definiiált μ_F k-dimenziós téren értelmezett mérték szerinti integrált $F_1(\,dx_1)\dots F_k(dx_k)$ vagy $dF_1(x_1)\dots\,dF_k(x_k)$-val jelölik, azaz

$$\int g(x_1,\dots,x_k)\mu_F(\,dx_1,\dots,\,dx_k) = \int g(x_1,\dots,x_k)\mu_{(F_1,\dots,F_k)}(\,dx_1,\dots,\,dx_k)$$
$$\overset{\text{jel.}}{=} \int g(x_1,\dots,x_k)F_1(\,dx_1)\dots F_k(\,dx_k) = \int g(x_1,\dots,x_k)\,dF_1(x_1)\dots\,dF_k(x_k)$$

tetszőleges integrálható $g(x_1,\dots,x_k)$ (integrálható) fügvényre, ahol „jel." a jelölés szó rövidítése. A továbbiakban mi is ezt a jelölést követjük.

Fubini tétel. *Legyenek $F_j(\cdot)$, $1\le j\le k$, eloszlásfüggvények a számegyenesen, és legyen $g(x_1,\dots,x_k)$ (mérhető) k-változós függvény. Ekkor*

$$\int g(x_1,x_2,\dots,x_k)F_1(\,dx_1)F(\,dx_2)\dots F_k(\,dx_k)$$
$$= \left(\int\dots\left(\int\left(\int g(x_1,\dots,x_k)F_1(\,dx_1)\right)F_2(\,dx_2)\right)\dots F_k(\,dx_k)\right).$$

Ez az azonosság úgy értendő, hogy az azonosság két oldalán lévő integrál illetve szukcessziv integrál egyszerre létezik.

Érdemes külön megfogalmazni ennek az azonosságnak a következő fontos speciális esetét. Ha $g(x_1,\dots,x_k)=g_1(x_1)\cdots g_k(x_k)$ alakú speciális függvények integrálját tekintjük, akkor a következő azonosságot írhatjuk fel:

$$\int g_1(x_1)g_2(x_2)\cdots g_k(x_k)F_1(\,dx_1)F_2(\,dx_2)\dots F_k(\,dx_k)$$
$$=\int g(x_1)F_1(\,dx_1)\int g_2(x_2)F_2(\,dx_2)\cdots\int g_k(x_k)F_k(\,dx_k)=\prod_{j=1}^k\int g_j(x)F_j(\,dx).$$

Megjegyzés: A Fubini tétel valójában egy általánosabb eredmény mint a most kimondott tétel. A Fubini tétel a megfogalmazottakhoz hasonló eredmény mond ki általános (és nemcsak az Euklideszi) terekben definiált szorzatmértékek szerinti integrálokra. Számunkra viszont elegendő csak a fent leírt speciális esetet tekinteni.

Megmutatjuk, hogy a Fubini tételből és azokból a eredményekből, melyek megadják, hogy valószínűségi változók függvényeinek várható értékét hogyan lehet ki kiszámolni e valószínűségi változók eloszlásfüggvényének a segítségével be lehet bizonyítani néhány a független valószínűségi változókról szóló alapvető eredményt.

Tétel. *Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_k$ független valószínűségi változók, melyek mindegyikének létezik várható értéke, azaz $E|\xi_j|<\infty$. Ekkor a $\xi_1\cdots\xi_k$ szorzatnak is létezik várható értéke, és*

$$E\xi_1\cdots\xi_k=E\xi_1\cdots E\xi_k.$$

Megjegyzés: Ezt az eredményt már láttuk korábban abban a speciális esetben, ha diszkrét valószínűségi változók szorzatát tekintjük.

A tétel bizonyítás: Jelölje $F_j(\cdot)$, $1\le j\le k$, a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, és vezessük be a $g(x_1,\dots,x_k)=x_1\dots x_k$ függvényt. Ekkor

$$E\xi_1\cdots\xi_k=Eg(\xi_1,\dots,\xi_k)=\int x_1\cdots x_kF_1(\,dx_1)\dots F_k(\,dx_k).$$

Továbbá a Fubini tétel szerint

$$\int x_1\cdots x_kF_1(\,dx_1)\dots F_k(\,dx_k)=\prod_{j=1}^k\int xF_j(\,dx).$$

Mivel $E\xi_j=\int xF_j(x)$, ez az azonosság azt jelenti, hogy $E\xi_1\cdots\xi_k=E\xi_1\cdots E\xi_k$. Ezenkívül azt is állíthatjuk (felhasználva azt a tényt, hogy a Fubini tétel két oldalán szereplő kifejezés egyszerre értelmes, hogy a Tételben szereplő azonosság két oldala egyszerre értelmes.

Tétel. *Legyenek* $\xi_1, \dots, \xi_k$ *független valószínűségi változók,* $B_1, \dots, B_k$ *a számegyenes Borel mérhető részhalmazai. Ekkor*

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_k \in B_k) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_k \in B_k).$$

Megjegyzés: A függetlenség definiciója csak azt követeli meg, hogy a tételben kimondott azonosság teljesüljön speciális $B_j = (-\infty, x_j)$ alakú halmazokra. A tétel azt állítja, hogy ha ez az azonosság teljesül ezekre a speciális alakú halmazokra, akkor ez teljesül minden ,,szép" azaz Borel mérhető halmazra. A tétel egyik következménye az, hogy a diszkrét valószínűségi változók esetében már korábban definiált függetlenség megegyezik a függetlenség fogalmával az általános esetben.

Bizonyítás: Legyen $g_j(\cdot)$ a B_j halmaz indikátorfüggvénye, $1 \le j \le k$, azaz legyen $g_j(x) = 1$, ha $x \in B_j$, és $g_j(x) = 0$, ha $x \notin B_j$. Definiáljuk a $g(x_1, \dots, x_k) = g_1(x_1) \cdots g_k(x_k)$ függvényt a k-dimenziós téren. Ekkor a Fubini tétel alapján

$$\begin{aligned} P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_k \in B_k) &= Eg(\xi_1, \dots, \xi_k) = Eg_1(\xi_1) \cdots Eg_k(\xi_k) \\ &= P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_k \in B_k). \end{aligned}$$

Feladat:

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}$ független valószínűségi változók, $g(x_1, \dots, x_n)$ n-változós (mérhető) függvény, $\eta = g(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Mutassuk meg a Fubini tétel segítségével, hogy $\eta, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}$ független valószínűségi változók.

Feladat:

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és legyen a ξ_j, $1 \le j \le n$, valószínűségi változónak sűrűségfüggvénye, és jelöljük az $f_j(\cdot)$-vel. Lássuk be a Fubini tétel segítségével, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektornak is van sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1, \dots, u_n) = f_1(u_1) \cdots f_n(u_n)$ függvény.

Független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzete, a nagy számok gyenge törvénye.

A diszkrét valószínűségi változókhoz hasonlóan defiálhatjuk általános, nem feltétlenül diszkrét valószínűségi változók szórásnégyzetét, (ezt az előző előadáson megtettük), kovarianciáját, és (független) valószínűségi változók összegének szórásnégyzetére hasonló formula érvényes mint a diszkrét esetben. Röviden leírjuk a bizonyítást, bár azt akár el is hagyhatnánk arra hivatkozva, hogy a diszkrét valószínűségi változók esetében is csak olyan összefüggéseket használtunk, melyek általános valószínűségi változók esetében is érvényesek.

Valószínűségi változók kovarianciájának a definiciója. *Legyen* ξ *és* η *két valószínűségi változó ugyanazon a valószínűségi mezőn, (melyekre teljesül az* $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$ *feltétel.) A* ξ *é* η *valószínűségi változók kovarianciafüggvénye*

$$\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)].$$

Lemma.

$$\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=0$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta) &= E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)] = E(\xi\eta-\xi E\eta-\eta E\xi+E\xi E\eta)\\ &= E\xi\eta-E\xi E\eta-E\xi E\eta+E\xi E\eta = E\xi\eta-E\xi E\eta.\end{aligned}$$

Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $E\xi\eta=E\xi E\eta$, ezért $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=0$.

Tétel. *Legyenek ξ_j, $1\le j\le k$, valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, melyekre teljesül $E\xi_j^2<\infty$ feltétel. Ekkor*

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^k \xi_j\right) = \sum_{j=1}^k \mathrm{Var}\,\xi_j + \sum_{\substack{1\le j,l\le k\\ j\ne l}} \mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_l) = \sum_{j=1}^k \mathrm{Var}\,\xi_j + 2\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{l=j+1}^{k} \mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_l).$$

Speciálisan, ha a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^k \xi_j\right) = \sum_{j=1}^k \mathrm{Var}\,\xi_j.$$

Bizonyítás. Vezessük be a $\bar\xi_j=\xi_j-E\xi_j$ valószínűségi változókat. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^k \xi_j\right) &= E\left(\sum_{j=1}^k \bar\xi_j\right)^2 = E\left(\sum_{j=1}^k \bar\xi_j^2 + \sum_{\substack{1\le j,l\le k\\ j\ne l}} \bar\xi_j,\bar\xi_l\right)\\ &= \sum_{j=1}^k E\bar\xi_j^2 + \sum_{\substack{1\le j,l\le k\\ j\ne l}} E\bar\xi_j\bar\xi_l = \sum_{j=1}^k \mathrm{Var}\,\xi_j + \sum_{\substack{1\le j,l\le k\\ j\ne l}} \mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_l).\end{aligned}$$

Ha a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, akkor $\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_l)=0$, ezért

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^k \xi_j\right) = \sum_{j=1}^k \mathrm{Var}\,\xi_j.$$

Legyenek ξ_j, $j=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, és legyen $E\xi_1^2<\infty$. Becsüljük meg a Csebisev egyenlőtlenség segítségével a

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \xi_j - E\xi_1\right| > \varepsilon\right)$$

valószínűségeket minden $n = 1, 2, \ldots$ és $\varepsilon > 0$ számra. Látni fogjuk, hogy ebből a becslésből adódik a valószínűségszámítás egyik fontos eredménye, a nagy számok (gyenge) törvénye.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - E\xi_1\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - E\xi_j)\right| > \varepsilon\right)$$

$$= P\left(\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - E\xi_j)\right)^2 > n^2\varepsilon^2\right) \le \frac{E\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\xi_j - E\xi_j)\right)^2}{n^2\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\operatorname{Var}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j\right)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\operatorname{Var}\xi_j}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{Var}\xi_1}{n\varepsilon^2}.$$

A nagy számok (gyenge) törvényének bizonyítása előtt bevezetünk két definiciót.

Sztochasztikus konvergencia definiciója. *Legyenek ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, független valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy a ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak a ξ valószínűségi változóhoz, ha $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > e) = 0$ minden $\varepsilon > 0$ számra.*

Megjegyzés: A mértékelméletben is megjelenik ez a fogalom, de ott ezt mértékben való konvergenciának nevezik.

Nagy számok gyenge törvényének a definiciója. *Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata egy valószínűségi mezőn, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Azt mondjuk, hogy ezek a ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, ha létezik olyan E szám, melyre teljesül, hogy az $\frac{S_n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak az E számhoz, azaz ahhoz a valószínűségi változóhoz, mely egy valószínűséggel az E konstanssal egyenlő.*

Tétel a nagy számok gyenge törvényéről. *Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyekre teljesül az $E\xi_1^2 < \infty$ tulajdonság. Ezek a valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét az $E = E\xi_1$ konstanssal.*

Bizonyítás: Láttuk, hogy az adott feltételek mellett

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - E\xi_1\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\operatorname{Var}\xi_1}{n\varepsilon^2}$$

minden $\varepsilon > 0$ számra. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{Var}\xi_1}{n\varepsilon^2} = 0$, innen következik a Tétel állítása.

Megjegyzés 1. A gyenge jelző a nagy számok gyenge törvényében arra utal, hogy a nagy számok gyenge törvényében független valószínűségi változók átlagainak konvergenciáját egy viszonylag gyenge konvergenciafogalom szerint, a sztochasztikus konvergencia szerint követeljök meg. A valószínűségszámításban foglalkoznak a nagy számok erős törvényével is, melyben ezen átlagok konvergenciáját egy erősebb konvergenciafogalom szerint, az úgynevezett egy valószínűséggel való konvergencia szerint követelik meg. Láttuk, hogy a nagy számok gyenge törvénye érvényes akkor, ha a tekintett független valószínűségi változók négyzetének létezik várható értéke. Felmerülhet az a kérdés, hogy ez a feltétel elhagyható-e vagy ha nem hagyható el, akkor lehet-e azt gyengíteni. Ugyancsak természetes probléma annak vizsgálata, hogy a $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E\right| > \varepsilon\right)$ valószínűségek milyen gyorsan tartanak nullához. Ezeknek a kérdéseknek a tárgyalásához később még visszatérünk.

Megjegyzés 2. Bár nem hangsúlyoztuk, de hallgatólagosan felhasználtuk azt a tényt, hogy amennyiben egy ξ valószínűségi változó négyzetének létezik várható értéke, akkor létezik a ξ valószínűségi változó várható értéke is. Valóban, ez következik az úgynevezett Cauchy–Schwarz egyenlőtlenségből, mely szerint $(E|\xi|)^2 \le E\xi^2$. Ez az egyenlőtlenség kiolvasható a szórásnégyzet figyelmesebb vizsgálatából, mely szerint $E\xi^2 - (E|\xi|)^2 = \operatorname{Var}|\xi| > 0$. Egy másik, talán egyszerűbb érvelés: Jelölje $F(\cdot)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor, mivel $|x| \le \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$, ezért $E|\xi| = \int |x| F(\,dx) \le \displaystyle\int \frac{1}{2}(x^2 + 1)F(\,dx) = \frac{1}{2}(E\xi^2+1) < \infty$, ha $E\xi^2 < \infty$.

A nagy számok (gyenge) törvényének szemléletes tartalma az, hogy ha sok egymástól független egyforma eloszlású kisérlet történik, akkor ezek átlaga ,,regularizálódik", konstans lesz. Ez magyarázza meg például azt a tényt, hogy minden évben közel ugyanannyi fiú és lány születik.

Független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvénye. Sűrűségfüggvények konvoluciója.

A következő kérdéssel foglalkozunk. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, melyeknek létezik $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye. Lássuk be, hogy a $\xi + \eta$ összegnek is létezik $h(\cdot)$ sűrűségfüggvénye, és adjuk meg azt a formulát, melynek segítségével azt kiszámölhatjuk. E vizsgálat során be fogjuk vezetni két (sűrűség)függvény konvoluciójának a fogalmát. Ezután alkalmazzuk ezt az eredményt néhány konkrét esetben.

Jelölje $H(x) = P(\xi + \eta < x)$ a független $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvényű ξ és η valószínűségi változók $\xi + \eta$ összeg eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$H(x) = P(\xi+\eta < x) = \int\!\!\int_{\{(u,v)\colon\, u+v<x\}} f(u)g(v)\,du\,dv$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{u}) g(\bar{v} - \bar{u})\, d\bar{u} \right] d\bar{v} = \int_{-\infty}^{x} K(v)\, dv,$$

ahol

$$K(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(v-u)\, du.$$

A fenti számolásokban egy integráltranszformációt alkalmaztunk $\bar{v} = u + v$, $\bar{u} = u$ helyettesítéssel. Felhasználtuk, hogy e transzformáció során az $\{(u,v)\colon u + v < x\}$ tartomány a $\{(\bar{u},\bar{v})\colon \bar{v} < x,\ -\infty < \bar{u} < \infty\}$ tartományba megy át, és a fenti (lineáris) transzformáció Jakobiánja azonosan 1.

Ezután bevezetjük a következő definiciót.

(Sűrűség)függvények konvoluciójának a definiciója. *Legyen $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ két sűrűségfüggvény a számegyenesen, általánosabban integrálható függvények, azaz tegyük fel, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du < \infty$ és $\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\, du < \infty$. Az $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ függvények $f * g(\cdot)$ konvoluciója az*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u)\, du, \qquad -\infty < x < \infty,$$

függvény.

Megjegyzés: Egyszerű (lineáris) transzformációval kapjuk, hogy a konvoluciót másképp is kiszámolhatjuk. Ez mutatja, hogy a konvolucióban résztvevő függvények szimmetrikus szerepet játszanak.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{2} - u\right) g\left(\frac{x}{2} + u\right) du, \qquad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Az előbb elvégzett számolásokból következik a következő eredmény.

Tétel független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényéről. *Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $\xi + \eta$ összegnek is létezik sűrűségfüggvénye, és az az*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u)\, du, \qquad -\infty < x < \infty$$

függvény.

Megjegyzés: Felmerülhet a kérdés, hogy amennyiben $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ integrálható függvény, de nem teszünk fel semmilyen további tulajdonságot ezekről a függvényekről, akkor szükségszerúen létezik-e az $f * g(\cdot)$ konvolució? Rögzített x számra az $f * g(x)$ számot definiáló integrál nem feltétlenül létezik. Viszont a mértékelméletben belátják, hogy az olyen kivételes pontok, melyekre ez az integrál nem létezik kevesen vannak, és a számegyenes majdnem minden pontjában a konvoluciót definiáló integrál létezik. Azokban a konkrét esetekben, melyekkel találkozni fogunk ez a probléma nem merül fel. Ezért azzal a kérdéssel nem foglalkozunk, csak megemlítjük a bizonyítás részleteinek vizsgálata nélkül, hogy az általános eset vizsgálata a következő észrevételen alapul. Belátják, hogy

$$\int_{\infty}^{\infty} |f| * |g|(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)||g(u)|\, du\, dv,$$

és az általános eredmény ebből az azonosságból és az integrálok alapvető tulajdonságaiból következik.

Ezután lássunk néhány példát a fenti eredmény alkalmazására.

Legyen ξ és η két független, a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.
Megoldás: A $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x) = \int f(y)f(x-y)\, dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x-y) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$, és $-\frac{1}{2} \le x - y \le \frac{1}{2}$, azaz $-\frac{1}{2} + x \le y \le \frac{1}{2} + x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi + \eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az x pontban megegyezik a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{1}{2} + x, \le \frac{1}{2} + x\right]$ intervallum hosszával. Ha $|x| > 1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x) =$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2}\right]$ intervallum, és ennek hossza $1 - x$, azaz ebben az esetben $g(x) = 1 - x$. Ha $-1 \le x \le 0$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + x\right]$ intervallum melynek hossza $1 + x = 1 - |x|$, azaz $g(x) = 1 + x = 1 - |x|$ ebben az esetben. Ez azt jelenti, hogy $g(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \le 1$, és $g(x) = 0$, ha $x > 1$.

Megadunk egy másik geometriai érvelésen alapuló megoldást is, amelyik a korábban tárgyalt geometriai érvelésen alapul.

Számítsuk ki először a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Definiáljuk a $K = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ négyzetet, és jelölje λ a Lebesgue mértéket, azaz a területet a síkon. Ekkor a sík tetszőleges $A \subset R^2$ mérhető részhalmazára igaz az, hogy $P((\xi, \eta) \in A) = \lambda(A \cap K)$. Speciálisan, $G(x) = P(\xi + \eta < x) = \lambda(K \cap \{(u, v)\colon u + v < x\})$. Ha $x \le -1$, akkor $G(x) = 0$, ha $-1 \le x \le 0$, akkor $G(x)$ a $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + x\right)$ és $\left(\frac{1}{2} + x, -\frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszög területe $\frac{1}{2}(1+x)^2$. Hasonlóan, ha $x \ge 1$, akkor $G(x) = 1$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor a $G(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik annak a poligonnak területével, melyet úgy kapunk, hogy a K négyzetből kihagyjuk a $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+x\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}+x,\frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszöget. Ezért $G(x)=1-\frac{1}{2}(1-x)^2$ ebben az esetben. A $G(x)$ függvényt deriválva kapjuk, hogy $g(x)=0$, ha $|x|\le 1$, $g(x)=1+x$, ha $-1\le x\le 0$, és $g(x)=1-x$, ha $0\le x\le 1$.

Tekintsünk két a második előadáson tárgyalt feladatot, melyet annak idején geometriai meggondolások alapján oldottunk meg. Megmutatjuk, hogy ezek a feladatok megoldhatóak a most tárgyalt konvolució segítségével is.

a.) Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

b.) Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

Az a) feladat megoldása. Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j-ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac{1}{2}\le\xi_1-\xi_2\le\frac{1}{2}$ események valószínűsége érdekel. Az $F(u)=P(\xi_1-\xi_2<u)$ eloszlás sűrűségfüggvénye a $g(u)=f_1*f_2(u)$ konvolúció, ahol $f_1(u)=1$, ha $0\le u\le 1$, $f_1(u)=0$, különben, $f_2(u)=1$, ha $-1\le u\le 0$, $f_2(u)=0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} g(u)\,du$ integrál. Továbbá,

$$g(x)=f_1*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)f_2(x-u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(x-u)\,du,\quad -\infty<x<\infty,$$

ahol $f(u)=1$, ha $\frac{1}{2}\le u\le\frac{1}{2}$, $f(u)=0$, ha $u\ge\frac{1}{2}$.
Az előző feladat megoldásában láttuk, hogy $g(u)=1-u$, ha $0<u<1$ $g(u)=1+u$, ha $-1<u<0$. Innen $F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}(1-|u|)\,du=\frac{3}{4}$.
A b.) feladat megoldása. Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy a j-ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1, és ξ_2 független valószínűségi változók, melyek sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, melyre $f(x)=2$, ha $0\le x\le\frac{1}{2}$, és $f(x)=0$ egyébként. Minket a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x)=f*f(x)$, ahonnan $g(x)=2-|2-4x|$, ha $0\le x\le 1$, $g(x)=0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt, melyet a a következő képletek adnak meg: $F(u)=0$, ha $u\le 0$, $F(u)=1-2u^2$, ha $0\le u\le\frac{1}{2}$, $F(u)=1-2(1-u)^2=4u-2u^2-1$, ha $\frac{1}{2}\le u\le 1$. Ha $u\ge 1$, akkor $F(u)=1$.

Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ha $x\ge 0$, és $f(x)=0$, ha $x>0$. Számítsuk ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét.

Általánosabban, legyenek $\xi_1, \dots \xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel. Számítsuk ki $\xi_1 + \cdots + \xi_m$ sűrűségfüggvényét.
Megoldás: Ki kell számolnunk az $f * f(x)$ illetve $\underbrace{f * \cdots * f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x) = 0$, ha $x \le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y \le 0$ vagy $x - y \le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x \ge 0$ esetén lehet nulla, az $x \le 0$ esetben $f(y)f(x-y) > 0$ minden y-ra nulla, és $x \ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y) > 0$ integrandus csak $0 \le y \le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x) = f * f(x)$ $x < 0$-ra $f_2(x) = 0$, és

$$
\begin{aligned}
f_2(x) = f * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\
&= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x \ge 0.
\end{aligned}
$$

Hasonlóan, ha $f_m(x) = \underbrace{f * \cdots * f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1 + \cdots \xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x) = 0$ minden $m \ge 1$ számra, ha $x < 0$. Azt állítjuk, hogy $f_m(x) = \dfrac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1} * f(x) = f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$
\begin{aligned}
f_{m-1} * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y) f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda^{m-1} \frac{y^{m-2}}{(m-2)!} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\
&= \lambda^m e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy = e^{-\lambda x} \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \text{ha } x \ge 0.
\end{aligned}
$$

Másrészt $f_m(x) = 0$, ha $x \le 0$.

Megjegyzés: Láttuk, hogy ha az $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$, ha $|x| \le \frac{1}{2}$ függvénynek, azaz az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénynek a konvolucióját tekintjük önmagával, akkor a konvolució az $f * f(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \le 1$, és $f * f(x) = 0$, ha $|x| \ge 1$. Ez azt jelenti, hogy ebben a példában az eredeti sűrűségfüggvény két pontban, az $x = \pm\frac{1}{2}$ pontban nem folytonos, viszont ennek konvoluciója önmagával már mindenütt folytonos. Hasonlóan egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x > 0$ sűrűségfüggvény. Ez a függvény nem folytonos az origóban, viszont ennek konvoluciója önmagával már mindenütt folytonos. Sőt, amennyiben e sűrűségfüggvény m-szeres konvolucióját alkalmazzuk m alkalommal, akkor az így kapott függvény még simább, $m - 1$-szer differenciálható. Ezek a példák azt sugallják, hogy a konvolució operátor folytonosabbá teszi a függvényeket. Ez az elképzelés helyes. Nem fogjuk ezt a kérdést részletesebben tárgyalni, de megfogalmazunk a következő feladatban egy olyan állítást, mely ilyen jellegű eredményt mond ki.

Feladat:

Legyen $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ két függvény, melyek k-szor illetve l-szer differenciálható, és ezek a differeniálhányadosok szintén integrálható függvények. Ekkor az $f * g(\cdot)$ konvolució $k+l$-szer differenciálható függvény.

Jegyezzük meg, hogy az előző feladatokban tekintett konvoluciót csak akkor használhatjuk, ha olyan valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét akarjuk kiszámolni, amelyek függetlenek. Ez az oka annak, hogy a következő feladat megoldásában nem használhatjuk a konvoluciót, hanem más módszert kell alkalmaznunk.

Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x \le 0$. Számítsuk ki a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Jelölje $G(x)$ a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a $G(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) + \xi^2(\omega) < x\})$ eloszlásfüggvényt kell kiszámolni az $F(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében. Viszont, ha ismerjük egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, akkor az meghatározza a $P(\omega\colon \xi(\omega) \in B)$ halmazok valószínűségét minden „szép", azaz Borel mérhető B halmazra. Vegyük észre, hogy jelen feladatban is ilyen jellegű problémát kell megoldani. Az ebben a feladatban megjelenő B halmaz egyszerű szerkezetű, és ezért ez a feladat könnyebben megoldható. Tekintsük az $A(\omega, x) = \{\omega\colon \xi(\omega) + \xi(\omega)^2 < x\}$ halmazokat. Ezek valószínűségét kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük az $B(x) = \{y\colon y + y^2 < x\}$ hamazt. Vegyük észre, hogy $B(x) = \{y\colon y_1(x) < y < y_2(x)\}$, ahol $y_1(x) = \dfrac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$ és $y_2(x) = \dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$ az $y^2 + y = x$ egyenlet kisebb és nagyobb megoldása, és $A(\omega, x) = \{\omega\colon y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}$. Innen $G(x) = P\left(\{\omega\colon y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}\right) = F(y_2(x)) - F(y_1(x))$. Ezért a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P\left(y_1(x) < \xi < y_2(x)\right) = P\left(\xi < y_2(x)\right) = 1 - e^{-y_2(x)} = 1 - \exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$, és $G(x) = 0$, ha $x \le 0$ függvény. A $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye ennek deriváltja, azaz $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}} \exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$.