**A február 27-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.**

*Feladatok:*

1. Minden $m$ valós számra

$$E(\xi-m)^2 = E(\xi-E\xi)^2 + ((E\xi)-m)^2\,.$$

Következésképpen

$$\operatorname{Var}\xi = \inf_{-\infty<m<\infty} E\left[(\xi-m)^2\right].$$

*Megoldás:*

$$\begin{aligned} E(\xi-m)^2 &= E\left[(\xi-E\xi)+(E\xi-m)\right]^2 \\ &= E(\xi-E\xi)^2 - 2E(\xi-m)E(\xi-E\xi) + E(\xi-m)^2 \\ &= E(\xi-E\xi)^2 + ((E\xi)-m)^2\,, \end{aligned}$$

mert $2E(\xi-m)E(\xi-E\xi) = 2E(\xi-m)(E\xi-E\xi) = 0$. Ebből az azonosságból adódik, hogy $E(\xi-m)^2 \ge E(\xi-E\xi)^2$ minden $m$ valós számra. Viszont $m=E\xi$ esetén az egyenlőtlenség két oldala megegyezik.

2. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fejdobások számának a várható értékét és szórásnégyzetét. Számítsuk ki ezt egyrészt direkt módon felírva és kiszámolva a várható értéket és szórásnégyzetet kifejező összeget másrészt egyszerűbben a független valószínűségi változók szórásnégyzetét kifejező képlet segítségével.

*Megoldás:* A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy $k$ fejdobás következik be, $0\le k\le 100$, $p_k = \binom{100}{k}2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k\binom{100}{k}2^{-100}$, ahol $\xi$ jelőli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Továbbá $E\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{100} k^2\binom{100}{k}2^{-100}$, a szórásnégyzet pedig $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2-(E\xi)^2$. Ezeket az összegeket közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, $k\binom{100}{k} = 100\binom{99}{k-1}$, $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k\binom{100}{k}2^{-100} = 50\sum\limits_{k=0}^{99} k\binom{99}{k}2^{-99} = 50\left(\frac12+\frac12\right)^{99} = 50$. Továbbá, $k^2\binom{100}{k} = [k(k-1)+k]\binom{100}{k} = 100\cdot 99\cdot\binom{98}{k-2} + 100\cdot\binom{100}{99}$, $E\xi^2 = \frac14\cdot 100\cdot 99\cdot \sum\limits_{k=0}^{98}\binom{98}{k} + \frac12\cdot 100\cdot\sum\limits_{k=0}^{99}\binom{99}{k} = 25\cdot 99+50$, $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2-(E\xi^2) = 25$.

Valójában a vizsgált várható értéket és szórásnégyzetet egyszerűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a $\xi_j$ valósz1nűségi változókat, $\xi_j=1$, ha a $j$-ik dobás eredménye fej $\xi_j=0$, ha a $j$-ik dobás eredménye írás, $1\le j\le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi = \sum_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum_{j=1}^{100} E\xi_j$, $\operatorname{Var}\xi = \sum_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{4}$, $1 \le j \le 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$.

3. Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a dobáseredmények összegének várható értékét és szórásnégyzetét.

   *Megoldás:* Legyenek $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változók, melyekre $P(\eta_j = k) = \dfrac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és szórásnégyzet $E\sum_{j=1}^{100} \eta_j = \sum_{j=1}^{100} E\eta_j$, $\operatorname{Var}\sum_{j=1}^{100} \eta_j = \sum_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\eta_j$. (A második reláció felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.) $E\eta_j = \dfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$, $E\eta_j^2 = \dfrac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$, $\operatorname{Var}\eta_j = \dfrac{35}{12}$, $E\xi = 350$, $\operatorname{Var}\xi = \dfrac{3500}{12}$.

   *Házi feladat:*

   Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Tekintsük a páros értékű dobások dobáseredményeinek összegét és számítsuk ki annak szórásnégyzetét.

4. Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szörásnégyzetét.

   *Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$, $1 \le j \le 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = 1$, ha a $j$-ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a $j$-ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi = \sum_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Továbbá $E\xi_j = E\xi_1 = \dfrac{2}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{25} = \dfrac{6}{25}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{19}{49} - \dfrac{4}{25} = -\dfrac{6}{1245}$, ha $j \ne k$. Innen a 20 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $20 \cdot \dfrac{2}{5} = 8$ és szórásnégyzete $20 \cdot \dfrac{6}{25} - 380 \cdot \dfrac{6}{1245} = \dfrac{144}{49}$.

   *Házi feladat:*

   Legyen egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót, és minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy másik azonos színű golyóval együtt. Számoltuk a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

   *Megjegyzés:* Használjuk az előző gyakorlat eredményét arról, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy adott húzásban piros golyót húzunk vagy két különböző húzás mindegyikében piros golyót húzunk.

5. Egy szabályos dobókockát feldobunk tízszer. Számoljuk ki a dobásösszeg harmadik hatványának a várható értékét.

   *Megoldás:* Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = k$, ha a $j$-ik dobás eredménye $k$, $1 \le j \le 10$, $1 \le k \le 6$. Ekkor az $E\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ várható értéket kell kiszmámítanunk. Ennek érdekében tekintsük a $\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ kifejezést és értsük meg milyen tagokat kapunk, ha elvégezzük a beszorzásokat. Egyrészt megjelenik 10 $\xi_j^3$ alakú kifejezés, és $E\xi_j^3 = E\xi_1^3$ minden ilyen tagra. Ezenkívül megjelenik $3 \cdot 10 \cdot 9$ $\xi_j^2 \xi_k$, $j \ne k$, alakú kifejezés, mert a lehetséges $(j,k)$ párokat $10 \cdot 9$ módon választhatjuk ki, és a $k$ (csak egyszer szereplő tényező) három helyen szerepelhet. Továbbá minden ilyen tagra $E\xi_j^2\xi_k = E\xi_j^2 E\xi_k = E\xi_1^2 E\xi_1$. Továbbá $10 \cdot 9 \cdot 8$ módon jelenhet meg $\xi_j\xi_k\xi_l$ alakú tag, ahol a $j$, $k$ és $l$ indexek mind különbözőek, és ezekre $E\xi_j\xi_k\xi_l = (E\xi_1)^3$. Másfajta tag nem jelenik meg a szorzatban. Innen $\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3 = 10E\xi_1^3 + 270E\xi_1(E\xi_1)^2 + 720\,(E\xi_1)^3 = 4410 + 14332.5 + 3087 = 218295.5$, mert $E\xi_1 = 3.5$, $E\xi_1^2 = \frac{91}{6}$ és $E\xi_1^3 = 441$.

6. Feldobunk egy dobókockát, majd ezután egy szabályos pénzdarabot annyi alkalommal, amennyi a kockadobás eredménye volt. (Az egyes dobások eredményei függetlenek egymástól.) Számoljuk ki a fejdobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

   *Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_{j,k}$, $1 \le j \le 6$, $1 \le k \le j$, valószínűségi változókat:

$$\xi_{j,k}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha a kockadobás eredménye } j \text{ és a } k\text{-ik pénzdobásé fej} \\ 0 & \text{ha a kockadobás eredménye } j \text{ és a } k\text{-ik pénzdobásé írás} \\ 0 & \text{ha a kockadobás eredménye nem } j \end{cases}$$

   Ekkor minket az $S = \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{j} \xi_{j,k}$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Vegyük észre, hogy

$$E\xi_{j,k} = P(\text{a kockadobás eredménye } j, \text{ a } k\text{-ik pénzdobásé fej}) = \frac{1}{12},$$

   $E\xi_{j,k}^2 = \frac{1}{12}$, $\operatorname{Var}\xi_{j,k}^2 = \frac{11}{144}$, $E\xi_{j,k}\xi_{j,k'} = \frac{1}{24}$, ha $k \ne k'$, ahonnan $\operatorname{Cov}(\xi_{j,k}, \xi_{j,k'}) = \frac{5}{144}$ ebben az esetben. Továbbá $E\xi_{j,k}\xi_{j',k'} = 0$, $\operatorname{Cov}(\xi_{j,k}\xi_{j',k'}) = -\frac{1}{144}$, ha $j \ne j'$ (függetlenül a $k$ és $k'$ számok viszonyától. Innen, $ES = \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{j} E\xi_{j,k} =$

$\frac{1+\cdots+6}{12}=\frac{21}{12}$, és

$$\operatorname{Var} S=\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{j}\operatorname{Var}\xi_{j,k}+\sum_{(j,k),(j',k')\colon\ j\neq j'\ \text{vagy}\ k\neq k'}\operatorname{Cov}(\xi_{j,k},\xi_{j',k'},$$

ahonnan $\operatorname{Var} S=\frac{11}{144}(1+\cdots+6)-\frac{1\cdot(21-1)+2\cdot(21-2)+\cdots 6\cdot(21-6)}{144}+\frac{5}{144}(2\cdot 1+3\cdot 2+\cdots 6\cdot 5)$. Ezt a képletet úgy kapjuk, hogy külön számoljuk azon $\operatorname{Cov}(\xi_{j,k},\xi_{j',k'}$ mennyiségek hozadékát melyekre $j\neq j'$ és azután azokét, melyekre $j=j'$, de $k\neq k'$. Innen $\operatorname{Var} S=\frac{231-350+350}{144}=\frac{77}{21}$.

Az előbbi feladat megoldásában megjelenő egyszerű alakú végeredménynek, (a megjelenő kiejtéseknek) mélyebb oka van. Ez a következő feladat témája.

7. Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független, egyforma eloszlású (diszkrét) valószínűségi változók, $\tau$ ezektől a valószínűségi változóktól független valószínűségi változó, mely csak $0,1,2,\dots,N$ értékeket vesz fel valamilyen $N$ pozitív egész számmal. Legyen $S=S_\tau=\sum\limits_{j=0}^{\tau}\xi_j$. Ekkor $ES=E\tau\cdot E\xi_1$. Ha ezenkívül $E\xi_1=0$, akkor $ES^2=E\tau\cdot E\xi_1^2$. Általában $\operatorname{Var} S=E\tau\cdot\operatorname{Var}\xi_1+(E\xi_1)^2\cdot\operatorname{Var}\tau$.

   *Megoldás:* Jelölje $I(\tau=k)$ az $\{\omega\colon \tau(\omega)=k\}$ esemény indikátorfüggvényét, és legyen $S_k=\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_j$. Ekkor

$$\begin{aligned}ES&=\sum_{k=0}^{N}ES_kI(\tau=k)=\sum_{k=0}^{N}ES_kEI(\tau=k)=\sum_{k=0}^{N}kE\xi_1P(\tau=k)\\&=E\xi_1\sum_{k=0}^{N}kP(\tau=k)=E\xi_1\cdot E\tau\end{aligned}$$

a függetlenségi tulajdonságok miatt. Hasonlóan, ha $E\xi_1=0$, akkor

$$\begin{aligned}ES^2&=\sum_{k=0}^{N}ES_k^2I(\tau=k)=\sum_{k=0}^{N}ES_k^2EI(\tau=k)=\sum_{k=0}^{N}kE\xi_1^2P(\tau=k)\\&=E\xi_1\sum_{k=0}^{N}kP(\tau=k)=E\xi_1\cdot E\tau,\end{aligned}$$

mert ebben az esetben $ES_k^2=\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_j\right)^2=\sum\limits_{j=1}^{k}E\xi_j^2+\sum\limits_{j\neq k}E\xi_jE\xi_k=\sum\limits_{j=1}^{k}E\xi_j^2=kE\xi_1^2$.

Végül az utolsó állítás bizonyításában legyen $\bar{\xi}_k = \xi_k - E\xi_k$, $\bar{S} = \sum_{k=0}^{\tau} \bar{\xi}_k$. $\bar{S}_k = \sum_{j=0}^{k} \bar{\xi}_j$, $1 \le k \le N$.
Ekkor

$$\operatorname{Var} S = E\left(\bar{S} + \tau E\xi_1\right)^2 - (ES)^2 = E\bar{S}^2 + 2E\tau\bar{S} \cdot E\xi_1 + E\tau^2 \left(E\xi_1\right)^2 - \left(E\tau E\xi_1\right)^2.$$

Innen $\operatorname{Var} S = E\tau \operatorname{Var} \xi_1 + \left(E\xi_1\right)^2 \left(E\tau^2 - (E\tau)^2\right) = E\tau \cdot \operatorname{Var} \xi_1 + \left(E\xi_1\right)^2 \cdot \operatorname{Var} \tau$, mert $E\tau\bar{S} = \sum_{k=0}^{N} P(\tau = k) E\bar{S}_k = 0$, és $E\bar{S}^2 = E\tau E\bar{\xi}_1^2 = E\tau \operatorname{Var} \xi_1$.