A február 6-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

1. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlásal. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

   Megoldás: Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember ember mikor érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x,y) pont az egységnégyzet

   $$A = \left\{(x,y)\colon\ -\frac{1}{2} \le y-x \le \frac{1}{2}\right\} \cap [0,1]\times[0,1]$$

   részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1-2\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

2. Két egy méter hosszú botot véletlenszerűen, (egymástól függetlenül) egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott új bot hossza kisebb mint 0.8 méter?

   Megoldás: Ez a feladat is hasonló módon tárgyalható. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint 0.8 megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x,y) pont a következő A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazok $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ uniójába esik: $A_1=\{(x,y)\colon x+y<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$, $A_2=\{(x,y)\colon x+(1-y)<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$, $A_3=\{(x,y)\colon 1-x+y<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$ és $A_4=\{(x,y)\colon 1-x+1-y<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$. Rajzoljuk le ezeket a halmazokat. Az ábra mutatja, hogy az $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ halmaz komplementere az a négyzet melynek csúcsai a (0.3, 0.5), (0.5, 0,3), (0.7, 0.5), és (0.5, 0.7) pontok. Ennek a négyzetnek a területe, 0.08 tehát a minket érdeklő valószínűség $1-0.08=0.92$.

Később tanulni fogunk olyan módszereket, melyek lehetővé teszik e két feladat megoldását más módon. Akkor majd vissza fogunk térni ezekhez a feladatokhoz.

3. Egy pénzdarabot, mely $\frac{1}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel az írás oldalára feldobunk (egymástól függetlenül) 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.

   Megoldás: Legyen ω egy elemi esemény egy 10 hosszúságú fej-írás sorozat. Tekintsük az összes ilyen sorozatból álló halmazt, ez legyen Ω, a biztos esemény.

Legyenek a $\mathcal{A}$ σ-algebra elemei az Ω halmaz részhalmazai. (Az összes lehetséges részhalmazt tekintjük.) Definiálnunk kell még egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz (esemény) valószínűségét $P(A)$ is. Ezt a következő módon tesszük: $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, és $P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$, ha az ω elemi esemény olyan sorozat, amelyik k fej és $10-k$ írásjelből áll. (Ugyanis minden fej-dobás esetén $\frac{1}{3}$ és minden írás-dobás esetén $\frac{2}{3}$-dal, a fej, illetve írásdobás valószínűségével kell megszorozni a valószínűséget.)

4. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót

   a.) visszatevéssel,

   b.) visszatevés nélkül.

   Adjunk erre valószínűségi modellt mind a két esetben.

   Megoldás: Az előző feladat megoldásához hasonló konstrukciót adhatunk. Legyenek az ω elemi események a 25 hosszúságú P, F (piros, fehér) jelekből álló sorozatok, az Ω biztos esemény az összes ilyen sorozatból álló halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazaiból álló halmaz, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra, és definiálnunk kell még a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Eddig a pontig az a.) és b.) esetet kielégítő konstrukció nem különbözött. A különbség az lesz, hogy a két esetben másképp fogjuk definiálni a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Az a.) esetben, amikor visszatevéssel húzzuk ki a golyókat, egy olyan ω valószínűsége, amelyik k P és $25-k$ F jelet tartalmaz $\left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{25-k}$, mert minden piros húzásnak $\frac{20}{50}$ és minden fehér húzásnak $\frac{30}{50}$ a valószínűsége, (a húzás előtt az urnában levő piros illetve fehér golyók száma osztva az urnában levő golyók számával.) A b.) eseben, amikor visszatevés nélkül húzzuk a golyókat, egy olyan ω valószínűsége, amelyik k P és $25-k$ F jelet tartalmaz $\dfrac{25 \cdot 24 \cdots (25-k+1) \cdot 30 \cdot 29 \cdots (30-(25-k)+1)}{50 \cdot 49 \cdots 26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valoszínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25} \dfrac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j-ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával, ha k fehér és $25-k$ piros húzás történt.

   Házi feladat:

   Egy szabályos dobókockát feldobunk 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.

5. Reggel valaki hazulról elmenve a lakáskulcsot elteszi, mégpedig úgy, hogy 0.5 valószínűséggel teszi a kabátzsebébe, 0.3 valószínűséggel a nadrágzsebébe és 0.2 valószínűséggel a mellényzsebébe. A nap folyamán mindenfelé jár, ezért a lakáskulcs a kabátzsebéből 0.1, a nadrágzsebéből 0.2, a mellényzsebéből viszont 0 valószínűséggel esik ki. Este hazatérve emberünk először a kabát majd a nadrágzsebében

keresi a kulcsot, de egyik helyen sem találja. Mi annak a valószínűsége, hogy a lakáskulcs ott van a mellényzsebében?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy emberünk a lakáskulcsot a kabát A_2, hogy a nadrág és A_3, hogy a mellényzsebébe tette. Jelölje továbbá B azt az eseményt, hogy a kulcs nem veszett el. Ekkor feltételeink szerint az A_1, A_2 és A_3 események egymást kizáróak, $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$ továbbá $P(B|A_1) = 0.9$, $P(B|A_2) = 0.8$ és $P(B|A_3) = 1$. Vezessük be a $C = (\bar{B} \cap A_1) \cup (\bar{B} \cap A_2) \cup A_3$ eseményt. Ekkor C jelenti azt az eseményt, hogy emberünk este nem találta a lakáskulcsot sem a kabát sem a nadrágzsebében. Ezért minket a $P(B|C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(C) = P(A_1 \cap \bar{B}) + P(A_2 \cap \bar{B}) + P(A_3) = P(\bar{B}|A_1)P(A_1) + P(\bar{B}|A_2)P(A_2) + P(A_3) = 0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2 = 0.31$, és $P(B \cap C) = P(B \cap A_3) = P(A_3) = 0.2$. Innen a minket érdeklő feltételes valószínűség értéke $\dfrac{0.2}{0.31} = \dfrac{20}{31}$.

6. A Fazekas könyv egyik feladata (3.4 Példa a 32. oldalon) arról szól, hogy ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is dolgozatot ír. Heurisztikusan úgy érvelhetünk, hogy ha a legjobb diák dolgozatot ír, akkor annak (feltételes) valószínűsége, hogy a legrosszabb diák is dolgozatot ír, azzal egyenlő, hogy a maradék $n-1$ diák közül őt is kiválasztják a maradék $r-1$ dolgozatíró közé, tehát $\dfrac{r-1}{n-1}$. Kissé pontosabban, annak valószínűsége, hogy mind a ketten dolgozatot írnak, $\dfrac{r(r-1)}{n(n-1)}$, annak, hogy a legjobb diák dolgozatot ír $\dfrac{r}{n}$, ahonnan következik az állítás. Ha a könyvben szereplő eredményt egyszerűbb alakra hozzuk, látjuk hogy az eredmény helyes. Adjunk közvetlen, a szemléletet követő precíz bizonyítást arra, hogy a fenti formulák az adott valószínűségekre helyesek.

   Megoldás: Az urna visszatevés nélküli húzás modelljének érvelését alkalmazhatjuk ebben az esetben is. Tegyük fel, hogy egymás után kiválasztjuk a dolgozatot írókat, Minden lépésben az eddig ki nem választottak valamelyikét választjuk ki egforma valószínűséggel. Ha kijelüljük (az urnából való húzásnál szereplő érvelést használva) egy külön (egy elemű) csoportba a legjobb, egy külön (egy elemű) csoportba a legrosszabb diákot, egy külön csportba az összes többit, akkor rögzítve egy $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$ számpárt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a j-ik választásnál választunk az első, a k-ik választáskor a második csoportból, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első választáskor választunk az első és a második választáskor a második csoportból. Ennek valószínűsége viszont $\dfrac{1}{n(n-1)}$. Mivel a fenti események különböző (j,k) számpárokra kizárják egymást, ezért annak valószínűsége, hogy a legjobb és alegrosszabb diák is dolgozatot ír $\dfrac{r(r-1)}{n(n-1)}$. Hasonlóan, látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a legjobb diák dolgozatot ír az $\dfrac{r}{n}$ számmal egyenlő.

7. Egy diák a feltett kérdésre (három lehetőség közül kell kiválasztani a megfelelőt) p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel, és ez $\dfrac{1}{3}$ valószínűséggel ad helyes eredményt. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy tudja a választ feltéve, hogy helyes választ adott?

   Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy tudja a helyes választ, B azt az eseményt, hogy helyes választ ad. A $P(A|B)$ feltételes valószínűség értékére vagyunk kiváncsiak. Ekkor $P(A) = P(A \cap B) = p$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) + \dfrac{1}{3}P(\bar{A}) = p + \dfrac{1}{3}(1-p)$. Innen $P(A|B) = \dfrac{p}{p + \frac{1}{3}(1-p)}$.

   Házi feladat:

   A zsebünkben van 30 kulcs, melyek közül az egyik nyit egy zárat. Egymás után kiprobáljuk véletlenszerűen kipróbálva ezeket a kulcsokat. Mi a valószínűsége annak, hogy a 20. kisérletre sikerül kinyitni a zárat? Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. kisérletben sikerül kinyitni a zárat feltéve, hogy az első 19 kisérletben ez nem sikerült?

8.) Feldobunk egy dobókockát, majd utána annyi dobókockát, amennyi az első dobás eredménye volt. Mi a valószínűsége annak, hogy a második dobássorozatban lesz hatos? Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy az első dobás eredménye hatos, ha a második dobássorozatban nem volt hatos?

   Megoldás: Tekintsünk azokat az eseményeket, melyek leírják a lehetséges dobássorozatok eredményét, és adjuk meg ezek valószínűségét. Annak valószínűsége, hogy az első dobás eredménye i, majd ezt követően egy i hosszúságú 1 és 6 közötti számokat tartalmazó dobássorozatot kapunk $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{i+1}$. Annak valószínűsége, hogy az első dobás eredménye i, és az utolsó i dobás egyike sem hatos, $\dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{i}$. Annak valószínűsége, hogy a második dobássorozatban van hatos

$$\frac{1}{6}\left(\left(1 - \frac{5}{6}\right) + \cdots + \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{6}\right)\right).$$

   Annak valószínűsége, hogy az első dobás hatos, utána pedig van hatos dobás $\dfrac{1}{6}\left(1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{6}\right)$. Ezért a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{6}}{\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)\right) + \cdots + \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{6}\right)}.$$

9.) Három gép gyárt csavarokat, az egyik 0.01 a második 0.02 a harmadik 0.03 valószínűséggel gyárt hibás csavarokat. A csavarokat egy raktárba viszik összekeverik. Egy gyártott csavar 0.5 valószínűséggel készült az első 0.3 valószínűséggel a második és 0.2 valószínűséggel készült a harmadik gépen. Kiveszünk egy csavart, megnézzük, és azt találjuk, hogy az hibás. Milyen valószínűséggel készült a csavar eme feltételek mellett az első gépen?

Megoldás: Jlölje A_1, A_2 illetve A_3 azt az eseményt, hogy a csavar az elsó, második vagy harmadik gépen készült, B azt az eseményt, hogy a csavar hibás. Ekkor minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$, továbbá $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_2) = 0.02$, és $PB(B|A_3) = 0.03$. Ekkor

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)} \\ &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2}. \end{aligned}$$

10. Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont

$$P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}.$$

Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{1}{11}$.

Házi feladat:

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk háromszor egymás után. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a három dobás fej, feltéve, hogy legalább két fejdobás történt?