A május 8-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Legyen $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó nulla várható értékkel és D kovariancia mátrix-szal. Legyenek a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ számok a D mátrix sajátértékei (multiplicitással). Bizonyítsuk be (alapvető lineáris algebrai ismeretek felhasználásával), hogy a $\sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j^2$ valószínűségi változó eloszlása megegyezik egy $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \xi_j^2$ valószínűségi változó eloszlásával, ahol $\xi_1, \dots, \xi_k$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók.
   Megoldás: A D mátrix felírható $D = U\Lambda U^*$ alakban, ahol U unitér, Λ pedig olyan diagonális mátrix, melynek átlójában a D mátrix λ_j sajátértékei vannak. (Az U mátrix is felírható explicit módon a D nátrix sajátvektorainak segítségével, de erre a tényre itt nincs szükségünk.) Az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ véletlen vektor eloszlása megegyezik egy $\bar\eta = (\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k) = \xi\Lambda^{1/2}U^* = (\xi_1, \dots, \xi_k)\Lambda^{1/2}U^*$ véletlen vektor eloszlásával, ahol a $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor standard normális eloszlású. Valóban $\bar\eta$ normális eloszlású véletlen vektor, melynek várható értéke nulla és kovariancia mátrixa a $(\Lambda^{1/2}U^*)^*\Lambda^{1/2}U^* = U\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}U^* = U\Lambda U^* = D$ mátrix. Ezért a $\sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j^2$ valószínűségi változó eloszlása megegyezik a $\sum\limits_{j=1}^{k} \bar\eta_j^2$ valószínűségi változó eloszlásával. Vegyük észre, hogy az $\tilde\eta = (\tilde\eta_1, \dots, \tilde\eta_k) = \bar\eta U = (\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k)U$ vektorra teljesül a $\sum\limits_{j=1}^{k} \bar\eta_j^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} \tilde\eta_j^2$ azonosság, mert U unitér, tehát távolságtartó transzformáció. Viszont $\tilde\eta = \bar\eta U = \xi\Lambda^{1/2}U^*U = \xi\Lambda^{1/2}$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j^2$ valószínűségi változó eloszlása megegyezik a $\sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j^{1/2}\xi_j)^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \xi_j^2$ valószínűségi változó eloszlásával, és ez a feladat állítása.
2. Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ m-dimenziós valószínűségi változó $\varphi_1(t_1, \dots, t_m)$ karakterisztikus függvénnyel, $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ n-dimenziós valószínűségi változó $\varphi_2(t_1, \dots, t_n)$ karakterisztikus függvénnyel. A $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektorok akkor és csak akkor függetlenek egymástól, ha a $(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n)$ $n+m$-dimenziós valószínűségi változó $\varphi_1(t_1, \dots, t_{n+m})$ karakterisztikus függvénye
   $$\varphi(t_1, \dots, t_{n+m}) = \varphi_1(t_1, \dots, t_m)\varphi_2(t_{m+1}, \dots, t_{m+n})$$
   alakban írható.
   Megoldás: Ha a $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektorok függetlenek, akkor a $(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye
   $$\begin{aligned}\varphi(t_1, \dots, t_{n+m}) &= Ee^{i(t_1\xi_1 + \cdots + t_m\xi_m + t_{m+1}\xi_{m+1} + \cdots + t_{m+n}\xi_{m+n})} \\ &= Ee^{i(t_1\xi_1 + \cdots + t_m\xi_m)}Ee^{i(t_{m+1}\xi_{m+1} + \cdots + t_{m+n}\xi_{m+n})} \\ &= \varphi_1(t_1, \dots, t_m)\varphi_2(t_{m+1}, \dots, t_{m+n})\end{aligned}$$

alakban írható.

Megfordítva, ha a $(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye teljesíti a $\varphi(t_1, \dots, t_{n+m}) = \varphi_1(t_1, \dots, t_m)\varphi_2(t_{m+1}, \dots, t_{m+n})$ azonosságot, akkor $\varphi_1(t_1, \dots, t_m) = \varphi(t_1, \dots, t_m, 0, \dots, 0)$ a $(\xi_1, \dots, \xi_m)$, és hasonlóan $\varphi_2(t_1, \dots, t_n)$ az $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektornak a karakterisztikus függvénye. Tekintsünk két független m illetve n-dimenziós véletlen vektort, melyek eloszlása megegyezik a $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ illetve $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektorok eloszlásával, és ezenkívül függetlenek egymástól. Ezeknek a valószínűségi változóknak a karakterisztikus függvénye a φ_1 illetve φ_2, együttes eloszlásuk pedig a $\varphi(t_1, \dots, t_{n+m})$ függvény. Mivel egy véletlen vektor karakterisztikus függvénye egyértelműen meghatározza e véletlen vektor eloszlását, innen következik, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektorok függetlenek.

Nem kötelező házifeladat:

Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata, akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $\eta_n = \sup\limits_{k \ge n} |\xi_k - \xi|$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k \ge n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0.$

Nem kötelező házifeladat:

a.) Ha ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak egy ξ valószínűségi változóhoz, akkor a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban is konvergálnak ehhez a ξ valószínűségi változóhoz.

b.) Ennek az állításnak a megfordítása nem igaz. Például, ha ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyek nem elfajultak, azaz nincs olyan konstans melyeket ezek a valószínűségi változók egy valószínűséggel vesznek fel, akkor a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a ξ_1 valószínűségi változóhoz, viszont nem konvergálnak sztochasztikusan.

c.) Viszont igaz a következő állítás: Ha ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy a konstanshoz, (azaz egy olyan valószínűségi változóhoz, mely egy valószínűséggel az a konstanst veszi fel, akkor a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan is konvergál ehhez az a konstashoz.

Nem kötelező házi feladat.

A ξ valószínűségi változó abszolut értékének akkor és csak akkor létezik várható értéke, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi| > n) < \infty$, a $|\xi|$ valószínűségi változónak akkor és csak akkor van véges második momentuma, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nP(|\xi| > n) < \infty$. Általánosabban $E|\xi|^k < \infty$ valamilyen $k = 1, 2, \dots$, számra akkor és csak akkor, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{k-1} P(|\xi| > n) < \infty$.

Nem kötelező házi feladat

Legyen ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, az $f(x) = \dfrac{C}{x^2 \log|x|}$, ha $|x| > 2$. $f(x) = 0$, ha $|x| \le 2$, képlettel megadott sűrűségfüggvénnyel. ($\displaystyle\int_{|x|>2} \frac{C\,dx}{x^2 \log|x|} = 1$.) Definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Lássuk be, hogy $E|\xi_1| = \infty$, ezért ezek a valószínűségi változók nem teljesítik a nagy számok erős törvényét. Másrészt az $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \to 0$, ha $n \to \infty$.

Segítség: Legyen $\bar{\xi}_k = \bar{\xi}_k^{(n)} = \xi_k I(|\xi_k| \le a_n)$, $\bar{\bar{\xi}}_k = \bar{\bar{\xi}}_k^{(n)} = \xi_k I(|\xi_k| > a_n)$, és $\bar{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k$, $\bar{\bar{S}}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\bar{\xi}}_k$. Ekkor $P(|S_n| > \varepsilon n) \le P\left(|\bar{S}_n| > \dfrac{\varepsilon}{2} n\right) + P\left(|\bar{\bar{S}}_n| > \dfrac{\varepsilon}{2} n\right) \le \dfrac{\operatorname{Var} \bar{S}_n}{\frac{\varepsilon^2}{4} n^2} + nP\left(\bar{\bar{\xi}}_1 \ne 0\right)$. Adjunk az a_n konstans alkalmas megválasztásával (például $a_n = n$) jó becslést a $P(|S_n| > n\varepsilon)$ valószínűségre.

3. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E\xi_1 = 0$ és $E\xi_1^2 < \infty$. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor pozitív valós számok valamely a_n sorozatára a $\dfrac{S_n}{a_n}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor tartanak sztochasztikusan nullához $n \to \infty$ esetén, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \infty$.

Megoldás: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \infty$, akkor

$$P\left(\frac{|S_n|}{a_n} > \varepsilon\right) = P\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n \operatorname{Var} \xi_1}} > \frac{\varepsilon a_n}{\sqrt{n \operatorname{Var} \xi_1}}\right) \le P\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n \operatorname{Var} \xi_1}} > K\right)$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $K > 0$ számra, ha $n \ge n_0(\varepsilon, K)$. Ezért a centrális határeloszlástétel alapján $P\left(\dfrac{|S_n|}{a_n} > \varepsilon\right) \le \delta$, ha $n \ge n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$, azaz az $\dfrac{S_n}{a_n}$ sorozat sztochasztikusan tart nullához.

Megfordíta, ha az $\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ sorozat nem tart végtelenhez, akkor létezik a természetes számoknak olyan $n_k \to \infty$ részsorozata, melyre $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{n_k}}{\sqrt{n_k}} \le L$, ezért

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} P\left(\frac{|S_{n_k}|}{a_{n_k}} > 1\right) &= \liminf_{k\to\infty} P\left(\frac{|S_{n_k}|}{\sqrt{n_k \operatorname{Var} \xi_1}} > \frac{a_{n_k}}{\sqrt{n_k \operatorname{Var} \xi_1}}\right) \\ &\ge \liminf_{k\to\infty} P\left(\frac{|S_{n_k}|}{\sqrt{n \operatorname{Var} \xi_1}} > \frac{L}{\sqrt{\operatorname{Var} \xi_1}}\right) > 0\end{aligned}$$

a centrális határeloszlástétel alapján. Ezért ebben az esetben az $\frac{S_n}{a_n}$ sorozat nem tar sztochasztikusan nullához.