A március 20-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

Feladatok:

1. Általános valószínűségi változók esetében is érvényes a

$$\inf_{-\infty<M<\infty} E(\xi-M)^2 = \operatorname{Var}\xi$$

azonosság.

Megoldás: A diszkrét valószínűségi változók esetéhez hasonlóan érvelhetünk.

$$E(\xi-M)^2 = E(\xi - E\xi + (E\xi_M))^2 = E(\xi-E\xi)^2 + (E\xi-M)^2 \ge \operatorname{Var}\xi,$$

és $M = E\xi$ esetében azonosság érvényes.

2. Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $\eta = a\xi + b$ és $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi < \dfrac{x-b}{a}\right) = F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ függvény, ha $a > 0$, és $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi > \dfrac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$, ha $a < 0$. Innen η sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{dG(x)}{dx} = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

A $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$G(x) = P(\xi^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right),$$

ha $x \ge 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen deriválással ζ sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right)$.

Házi feladat:

Legyen egy ξ valószínűségi változónak $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Számítsuk ki ξ^3 és ξ^4 sűrűségfüggvényét.

3. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, m, σ valós számok, akkor az $\sigma\xi + m$ valószínűségi változó várható értéke m szórásnégyzete σ^2, sűrűségfüggvénye pedig $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}|\sigma|} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

Megoldás: $E(\sigma\xi + m) = \sigma E\xi + m = m$, és $\operatorname{Var}(\sigma\xi + m) = \sigma^2 \operatorname{Var}\xi = \sigma^2$. Továbbá, az előző feladat eredménye alapján a $\sigma\xi + m$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f(x) = \dfrac{1}{|\sigma|}\varphi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$, ahol $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, a standard normális sűrűségfüggvény. Innen következik a feladat állítása.

4. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor$E\xi^{2k-1} = 0$, $E\xi^{2k} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ minden $k = 1, 2, \ldots$ számra.

Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait.
Megoldás:

$$E\xi^{2k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 0,$$

mert az integrandus páratlan függvény. Másrészt parciális integrálással $f(x) = x^{2k-1}$ és $g(x) = x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E\xi^{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1)x^{2k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \\ &= (2k-1)E\xi^{2k-2}. \end{aligned}$$

Innen k szerinti indukcióval kapjuk a feladat második állítását.

Házi feladat:

Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait, azaz egy olyam valószínűségi változó momentumait adjuk meg, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$.

5. Mutassuk meg, hogy egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > x)$$

minden $x \geq 0$ és $y \geq 0$ számra.
Megoldás: Mivel $P(\xi > u) = e^{-\lambda u}$ minden $u \geq 0$ számra, ezért $P(\xi > x + y | \xi > y) = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\xi > x)$.

Nem kötelező házi feladat:

Ha egy ξ valószínűségi változó teljesűti az örökifjú tulajdonságot, akkor az exponenciális eloszlású.

Segítség: Azt kell belátni, hogy amennyiben $P(\xi > x + y) = P(\xi > x)P(\xi > y)$ minden $x \geq 0$ és $y \geq 0$ számra, akkor $P(\xi > x) = e^{-\lambda x}$ minden $x \geq 0$ számra. Legyen $P(\xi > x) = e^{-\lambda(x)x}$ valamely $x > 0$ számra. Lássuk be először az $y = \frac{p}{q}x$ alakú számokra, ahol p és q pozitív egész számok, hogy $P(\xi > y) = e^{-\lambda(x)y}$. Végül, mivel $P(\xi > x)$ monoton csökkenő függvény, ezért $\lambda(x) = \lambda$.

6. Mutassuk meg, hogy létezik olyan ξ valószínűségi változó teljesíti a következő szuper örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y | \xi > y) > P(\xi > x)$$

minden $x > 0$ és $y > 0$ számra.

Megoldás: Legyen a ξ valószínűségi változó olyan, hogy $P(\xi > x) = e^{-\sqrt{x}}$, ha $x \geq 0$ és $P(\xi > x) = 1$, ha $x < 0$. Ekkor $P(\xi > x + y | x > y) = e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}$, ha $x > 0$, $y > 0$. Ezért elég megmuatatni, hogy $e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} > e^{-\sqrt{y}}$, illetve hogy $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ha $x > 0$ és $y > 0$. Ez az egyenlőtlenség viszont (négyzetre emelés után) könnyen látható.

7. Legyen egy (ξ_1, ξ_2) véletlen vektor eloszlása az $F(x_1, x_2) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2)$ függvény, $-\infty < a_1 < b_1 < \infty$, $-\infty < a_2 < b_2 < \infty$ valós számok. Fejezzük ki az $F(x_1, x_2)$ eloszlásfüggvény segítségével a $P(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2)$, $P(a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2)$ és $P(a_1 < \xi_1 < b_1, a_2 < \xi_2 < b_2)$ valószínűségeket.

   Megoldás: Először azt megmutatjuk meg, hogy $P(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$. Valóban, $F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) = P(\xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2)$, és $F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2) = P(\xi_1 < a_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2)$. Ezt a két azonosságot kivonva egymásból megkapjuk a kívánt állítást.

$$\begin{aligned}
P(a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2) &= \lim_{n\to\infty} P\left(a_1 \leq \xi_1 < b_1 + \frac{1}{n}, a_2 \leq \xi_2 < b_2 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(F\left(b_1 + \frac{1}{n}, b_2 + \frac{1}{n}\right) - F\left(b_1 + \frac{1}{n}, a_2\right) - F\left(a_1, b_2 + \frac{1}{n}\right) + F(a_1, a_2)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} F\left(b_1 + \frac{1}{n}, b_2 + \frac{1}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} F\left(b_1 + \frac{1}{n}, a_2\right) \\
&\qquad - \lim_{n\to\infty} F\left(a_1, b_2 + \frac{1}{n}\right) + F(a_1, a_2).
\end{aligned}$$

   Jegyezzük meg, hogy az eloszlásfüggvény tulajdonságaiból következik, hogy a felírt határértékek, például a $\lim\limits_{n\to\infty} F\left(b_1 + \frac{1}{n}, b_2 + \frac{1}{n}\right)$ kifejezés valóban létezik.

   Hasonlán,

$$\begin{aligned}
P(a_1 < \xi_1 < b_1, a_2 < \xi_2 < b_2) &= \lim_{n\to\infty} P\left(a_1 + \frac{1}{n} \leq \xi_1 < b_1, a_2 + \frac{1}{n} \leq \xi_2 < b_2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} F(b_1, b_2) - F\left(b_1, a_2 + \frac{1}{n}\right) \\
&\qquad - \lim_{n\to\infty} F\left(a_1 + \frac{1}{n}, b_2\right) + \lim_{n\to\infty} F\left(a_1 + \frac{1}{n}, a_2 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

8. Legyen az $F(x_1, \dots, x_k) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k)$ függvény a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor eloszlásfüggvénye. Mutassuk meg a várható érték additivitásának felhasználásával (és alkalmas halmazok indikátorfüggvényének a bevezetésével), hogy

$$P((a_j \leq \xi_j < b_j,\ 1 \leq j \leq k) = \sum_{\substack{u_j = a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\psi(u_1,\dots,u_k)} F(u_1, \dots, u_k),$$

   ahol $\psi(u_1, \dots, u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1, \dots, u_k$ sorozatban.

Megoldás: Adva valamely $u_1, \dots, u_k$ számok, definiáljuk a

$$B(u_1, \dots, u_k) = \{(t_1, \dots, t_k) \colon t_j < u_j,\ 1 \le j \le k\}$$

halmazt, és legyen $\chi_{B(u_1,\dots,u_k)}(\omega)$ az $\{\omega \colon (\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega)) \in B(u_1, \dots, u_k)\}$ halmaz indikátorfüggvénye. Legyen továbbá $\chi_{\mathbf{K}}(\omega)$ az $\{\omega \colon a_j \le \xi_j < b_j,\ 1 \le j \le k\}$ halmaz indikátorfüggvénye. Elég megmutatni, hogy

$$\chi_{\mathbf{K}}(\omega) = \sum_{\substack{u_j = \, a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\psi(u_1,\dots,u_k)} \chi_{B(u_1,\dots,u_k)}(\omega),$$

mert véve ezután mind a két oldal várható értékét megkapjuk a kívánt azonosságot. Az is világos, hogy $\{\omega \colon a_j \le \xi_j < b_j,\ 1 \le j \le k\}$ esetében a bizonyítandó azonosság mind a két oldala 1-gyel egyenlő. Azt kell észrevenni, hogy ekkor a jobboldalon a $\chi_{B(b_1,\dots,b_k)}(\omega)$ tag 1, és az összes többi tag a jobboldalon nulla.
Ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy az $a_j \le \xi_j < b_j$ egyenlőtlenségek nem teljesülnek minden $1 \le j \le k$ indexre, akkor a baloldal nulla. Azt kell belátni, hogy ugyanez érvényes a jobboldalon. Világos, hogy a jobboldal nulla, ha $\xi_j(\omega) \ge b_j$ valamilyen j indexre. Azt az esetet kell még nézni, amikor $\xi_j(\omega) < b_j$ minden $1 \le j \le k$ indexre, bizonyos j indexekre $a_j \le \xi_j < b_j$, de létezik legalább egy olyan l index, melyre $\xi_j < a_j$. Legyen L a legkisebb ilyen index. Ha párosítjuk az olyan $(-1)^{\psi(u_1,\dots,u_k)} \chi_{B(u_1,\dots,u_k)}(\omega)$ kifejezéseket, melyeknek az u_j koordinátátái megegyeznek $j \ne L$ esetben, de $u_L = a_L$ a pár egyik és $u_L = b_L$ a pár másik tagjára, akkor az összes ilyen pár hozadéka zéró. Ezért az azonosság ekkor is érvényes, mert mind a bal mind a jobboldal zéró ebben az esetben.