A március 27-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

Feladatok: Az első feladat megfogalmazása előtt felidézzük a több-dimenziós eloszlás definicióját.

Többdimenziós halmazokra koncentrált egyenletes eloszlás definiciója. *Legyen adva egy $A \subset R^k$ (Borel mérhető) halmaz a k-dimenziós téren, melynek Lebesque mértéke teljesíti a $\lambda(A) > 0$ feltételt. Az A-halmazon definiált egyenletes eloszlás az a P valószínűségi mérték az R^k tér Borel mérhető részhalmazain, melyre $P(B) = \dfrac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(A)}$ minden Borel mérhető halmazra a k-dimenziós téren. Másképp megfogalmazva, az A halmazra koncentrált egyenletes eloszlás az az eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye $f(u_1, \dots, u_k) = \dfrac{1}{\lambda(A)}$, ha $(u_1, \dots, u_k) \in A$, és $f(u_1, \dots, u_k) = 0$, ha $(u_1, \dots, u_k) \notin A$.*

1. Adjuk meg a $[0,1 \times \cdots \times [0,1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét.

b.) Tekintsük a síkon a $(0,0)$, $(0,1)$ és $(1,0)$ csúcspontok által meghatározott $\mathbf{K}$ háromszögön az egyenletes eloszlást. Adjuk meg ennek eloszlásfüggvényét.

Megoldás: A $[0,1\times\cdots\times[0,1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlása az $F(x_1, \dots, x_k) = G(x_1) \cdots G(x_k$ függvény, ahol $G(x) = 0$, ha $x \le 0$, $G(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, és $G(x) = 1$, ha $x \ge 1$.

A tekintett háromszögön definiált egyenletes eloszlás $H(x,y)$ eloszlásfüggvénye, $H(x,y) = 0$, ha $x \le 0$ vagy $y \le 0$. $H(x,y) = 1$, ha ≥ 1 és $y \ge 1$. Definiálni kell még a $H(x,y)$ eloszlásfüggvényt abban az esetben, ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$. Ebben az esetben $H(x,y) = 2\lambda([0,x] \times [0,y] \cap \mathbf{K})$. innen $H(x,y) = xy$, ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$, és $x + y \le 1$. Ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$, és $x + y \ge 1$, akkor $H(x,y) = xy - \dfrac{1}{2}(x + y - 1)^2$.

2. Legyenek $F_1(\cdot)$, ..., $F_k(\cdot)$ eloszlásfüggvények a számegyenesen, és definiáljuk az $F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$ függvényt. Ez az $F(x_1, \dots, x_k)$ függvény k-változós eloszlásfüggvény.

   Részletesebben kifejtve a következőt állítjuk. A hetedik és nyolcadik előadásban megadtuk a szükséges és elégséges feltételét annak hogy egy egydimenziós illetve többdimenziós függvény eloszlásfüggvény függvény legyen. Azt állítjuk, hogy ha az $F_j(\cdot)$, $1 \le j \le k$, függvények teljesítik az (egydimenziós) eloszlásfüggvény jellemzését leíró tulajdonságokat, akkor az $F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$ függvény teljesíti a többdimenziós eloszlásfüggvény eloszlását leíró tulajdonságokat. Felidézzük azt a két eredményt, melyekre ebben a példában hivatkoztunk.

Tétel. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $F(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$, $-\infty < x < \infty$, e valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Az $F(x)$ eloszlásfüggvény teljesíti a következő tulajdonságokat.*

a) *$F(x)$ monoton növekvő függvény.*

b) *$F(x)$ balról folytonos függvény, azaz $\lim\limits_{h \to 0,\, h > 0} F(x - h) = F(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

c) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0.$

Megfordítva, ha egy $F(x)$ függvény teljesíti az előző lemmában megfogalmazott a)— d) tulajdonságokat, akkor az eloszlásfüggvény.

Tétel. *Egy $F(u_1,\dots,u_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye alkalmas $\xi_1,\dots,\xi_k$ valószínűségi változóknak valamely $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, ha ez az F függvény teljesíti a következő (i)—(iv) tulajdonságokat.*

(i) $F(u_1,\dots,u_k)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

(ii) $\lim\limits_{\substack{u_j\to\infty\\ \text{minden } j=1,\dots,k \text{ számra}}} F(u_1,\dots,u_k) = 1.$

(iii) $\lim\limits_{\substack{u_j\to-\infty\\ \text{valamely } 1\le j\le k \text{ számrra}}} F(u_1,\dots,u_k) = 0.$ *(Ez úgy értendő, hogy az összes u_s, $1\le s\le k$, $s\ne j$ koordinátát rögzítjük, és $u_j\to-\infty$.)*

Végül definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K}=[a_1,b_1)\times\dots\times[a_k,b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K}) = \mu_F(\mathbf{K}) = \sum_{\substack{u_j=\,a_j \text{ vagy } b_j\\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\chi(u_1,\dots,u_k)} F(u_1,\dots,u_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(u_1,\dots,u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1,\dots,u_k$ sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K})\ge 0$ minden $\mathbf{K}$ téglatestre.

Megoldás: Az $F(x_1,\dots,x_k)=F_1(x_1)\cdots F_2(x_k)$ teljesíti az (i(tulajdonságot, mert mindegyik $F_j(\cdot)$ teljesíti a b) tulajonságot. Hasonlóan a (ii) tulajdonság következik a c), (iii) pedig a d) tulajdonságból. Végül $\mu(\mathbf{K}) = \prod\limits_{j=1}^{k} [F_j(b_j)-F_j(a_j)]$, ha $\mathbf{K} = [a_1,b_1)\times\dots\times[a_k,b_k)$, ezért az a) tulajdonságból következik, hogy $\mu(\mathbf{K})\ge 0$, azaz hogy igaz a (iv) tulajdonság.

3. Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+m}$ független valószínűségi változók, $g(x_1,\dots,x_n)$ n-változós (mérhető) függvény, $\eta = g(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Mutassuk meg a Fubini tétel segítségével, hogy $\eta,\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+m}$ független valószínűségi változók.

   Megoldás: Rögzítsünk valamilyen $x_0,x_1,\dots,x_m$ számokat. Definiáljuk ezek segítségével a $h_j(u)=1$, ha $u<x_j$, $h_j(u)=0$, ha $u\ge x$, $1\le j\le m$, függvényeket, valamint legyen $h_0(u_1,\dots,u_n)=1$, ha $g(u_1,\dots,u_n)<x_0$, $h_0(u_1,\dots,u_n)=0$, ha $g(u_1,\dots,u_n)\ge x_0$. Jelölje $F_j(\cdot)$ a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a Fubini tétel alapján

$$\begin{aligned}&P(\eta<x_0,\xi_{n+1}<x_{n+1},\dots,\xi_{n+m}<x_{n+m})\\ &\qquad=\int h_0(u_1,\dots,u_n)h_1(u_{n+1})\dots h_{n+m}(u_{n+m})F(\,du_1)\dots F_{n+m}(\,du_{n+m})\end{aligned}$$

$$= \int h_0(u_1,\dots,u_n)F(\,du_1)\dots F_{n+m}(\,du_n)$$

$$\int h_1(u_{n+1})F(\,du_1)\cdots\int h_{n+m}(u_{n+m})F_{n+m}(\,du_{n+m})$$

$$= P(\eta < x_0)P(\xi_{n+1} < x_{n+1})\cdots P(\xi_{n+m} < x_{n+m}),$$

ahonnan következik a feladat állítása.

4. Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független valószínűségi változók, és legyen a ξ_j, $1\le j\le n$, valószínűségi változónak sűrűségfüggvénye, és jelöljük az $f_j(\cdot)$-vel. Lássuk be a Fubini tétel segítségével, hogy a $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ véletlen vektornak is van sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1,\dots,u_n)=f_1(u_1)\cdots f_n(u_n)$ függvény.

   Megoldás: Rögzítsünk valamilyen $x_0,x_1,\dots,x_n$ számokat, és definiáljuk ezek segítségével a $h_j(u)=1$, ha $u<x_j$, $h_j(u)=0$, ha $u\ge x$ $1\le j\le n$, függvényeket. Ekkor

$$\begin{aligned}P(\xi_1<x_1,\cdots,\xi_n<x_n) &= P(\xi_1<x_1)\cdots P(\xi_n<x_n)\\ &= \int h_1(u)f_1(u)\,du\cdots\int h_n(u)f_n(u)\,du\\ &= \int\cdots\int h_1(u_1)f_1(u_1)\cdots h_n(u_n)f_n(u_n)\,du_1\dots du_n\\ &= \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_1(u_1)\cdots f_n(u_n)\,du_1\dots du_n\end{aligned}$$

   ahonnan következik a feladat állítása.

5. Legyen ξ és η két független, a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x)=1$, ha $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$, és $f(x)=0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

   Megoldás: A $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x)=\int f(y)f(x-y)\,dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x-y)=1$, ha $-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}$, és $-\frac{1}{2}\le x-y\le\frac{1}{2}$, azaz $-\frac{1}{2}+x\le y\le \frac{1}{2}+x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi+\eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az x pontban megegyezik a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cap\left[-\frac{1}{2}+x,\le\frac{1}{2}+x\right]$ intervallum hosszával. Ha $|x|>1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x)=$. Ha $0\le x\le 1$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2}+x,\frac{1}{2}\right]$ intervallum, és ennek hossza $1-x$, azaz ebben az esetben $g(x)=1-x$. Ha $-1\le x\le 0$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+x\right]$ intervallum melynek hossza $1+x=1-|x|$, azaz $g(x)=1+x=1-|x|$ ebben az esetben. Ez azt jelenti, hogy $g(x)=1-|x|$, ha $|x|\le 1$, és $g(x)=0$, ha $x>1$.

Megadunk egy másik geometriai érvelésen alapuló megoldást is, amelyik a korábban tárgyalt geometriai érvelésen alapul.

Számítsuk ki először a $\xi+\eta$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Definiáljuk a $K=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ négyzetet, és jelölje λ a Lebesgue mértéket, azaz a területet a síkon. Ekkor a sík tetszőleges $A\subset R^2$ mérhető részhalmazára igaz az, hogy $P((\xi,\eta)\in A)=\lambda(A\cap K)$. Speciálisan, $G(x)=P(\xi+\eta<x)=\lambda(K\cap\{(u,v)\colon u+v<x\})$. Ha $x\le -1$, akkor $G(x)=0$, ha $-1\le x\le 0$, akkor $G(x)$ a $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+x\right)$ és $\left(\frac{1}{2}+x,-\frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszög területe $\frac{1}{2}(1+x)^2$. Hasonlóan, ha $x\ge 1$, akkor $G(x)=1$. Ha $0\le x\le 1$, akkor a $G(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik annak a poligonnak területével, melyet úgy kapunk, hogy a K négyzetből kihagyjuk a $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+x\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}+x,\frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszöget. Ezért $G(x)=1-\frac{1}{2}(1-x)^2$ ebben az esetben. A $G(x)$ függvényt deriválva kapjuk, hogy $g(x)=0$, ha $|x|\le 1$, $g(x)=1+x$, ha $-1\le x\le 0$, és $g(x)=1-x$, ha $0\le x\le 1$.

Tekintsünk két a második előadáson tárgyalt feladatot, melyet annak idején geometriai meggondolások alapján oldottunk meg. Megmutatjuk, hogy ezek a feladatok megoldhatóak a most tárgyalt konvolució segítségével is.

6. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

   Megoldás: Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j-ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac{1}{2}\le\xi_1-\xi_2\le\frac{1}{2}$ események valószínűsége érdekel. Az $F(u)=P(\xi_1-\xi_2<u)$ eloszlás sűrűségfüggvénye a $g(u)=f_1*f_2(u)$ konvolúció, ahol $f_1(u)=1$, ha $0\le u\le 1$, $f_1(u)=0$, különben, $f_2(u)=1$, ha $-1\le u\le 0$, $f_2(u)=0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}g(u)\,du$ integrál. Továbbá,

$$g(x)=f_1*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(u)f_2(x-u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)f(x-u)\,du,\quad -\infty<x<\infty,$$

   ahol $f(u)=1$, ha $\frac{1}{2}\le u\le\frac{1}{2}$, $f(u)=0$, ha $u\ge\frac{1}{2}$.
   Az ötödik feladat megoldásában láttuk, hogy $g(u)=1-u$, ha $0<u<1$ $g(u)=1+u$, ha $-1<u<0$. Innen $F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}(1-|u|)\,du=\frac{3}{4}$.

7. Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

   Negoldás: Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy a j-ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1, és ξ_2 független valószínűségi változók, melyek sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, melyre $f(x)=2$, ha $0\le x\le \frac12$, és $f(x)=0$ egyébként. Minket a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x)=f*f(x)$, ahonnan $g(x)=2-|2-4x|$, ha $0\le x\le 1$, $g(x)=0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt, melyet a a következő képletek adnak meg: $F(u)=0$, ha $u\le 0$, $F(u)=1-2u^2$, ha $0\le u\le \frac12$, $F(u)=1-2(1-u)^2=4u-2u^2-1$, ha $\frac12\le u\le 1$. Ha $u\ge 1$, akkor $F(u)=1$.

8. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ha $x\ge 0$, és $f(x)=0$, ha $x>0$. Számítsuk ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét.

   Általánosabban, legyenek $\xi_1,\dots\xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda>0$ paraméterrel. Számítsuk ki $\xi_1+\dots+\xi_m$ sűrűségfüggvényét.

   Megoldás: Ki kell számolnunk az $f*f(x)$ illetve $\underbrace{f*\dots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x)=0$, ha $x\le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y\le 0$ vagy $x-y\le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x\ge 0$ esetén lehet nullától különböző, mert az $x\le 0$ esetben $f(y)f(x-y)=0$ minden y-ra. Az $x\ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y)>0$ reláció csak $0\le y\le x$ esetén teljesül. Innen a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x)=f*f(x)$ $x<0$-ra $f_2(x)=0$, és

$$f_2(x)=f*f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy$$
$$=\int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy=\lambda^2 xe^{-\lambda x},\quad \text{ha } x\ge 0.$$

   Hasonlóan, ha $f_m(x)=\underbrace{f*\dots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1+\dots+\xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x)=0$ minden $m\ge 1$ számra, ha $x<0$. Azt állítjuk, hogy $f_m(x)=\dfrac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1}*f(x)=f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$f_{m-1}*f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{m-1}(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x \lambda^{m-1}\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\lambda e^{-\lambda y}e^{-\lambda(x-y)}\,dy$$
$$=\lambda^m e^{-\lambda x}\int_0^x\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy=e^{-\lambda x}\frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!},\quad \text{ha } x\ge 0.$$

9. Legyen $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ két függvény, melyek k-szor illetve l-szer differenciálható, és ezek a differeniálhányadosok szintén integrálható függvények. Ekkor az $f*g(\cdot)$ konvolució $k+l$-szer differenciálható függvény.

   Megoldás: Integrálva k-szor az $f*g(x)=\int f(x-u)g(u)\,du$ kapjuk, hogy

$$\frac{d^k}{dx^k}f*g(x)=\int\frac{d^k}{dx^k}f(x-u)g(u)\,du=\int\frac{d^k}{du^k}f(u)g(x-u)\,du.$$

Integrálva ezt az azonosságot l alkalommal kapjuk, hogy

$$\frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}} f * g(x) = \int \frac{d^k}{du^k} f(u) \frac{d^l}{dx^l} g(x-u)\, du.$$

Ebből a formulából következik a feladat állítása. A bizonyítás azon alapult, hogy az $f*g$ konvoluciót kifejező integrál differenciálásakor mindig csak az egyik változó szerint kellett deriválni, és egyszerű helyettesítéssel elérhető, hogy aszerint a változó szerint deriváljunk, amelyik szerint akorunk. Így összesen $k+l$ deriválást hajthatunk végre, k-szor az egyik l-szer a másik változó szerint deriválva.

Jegyezzük meg, hogy az előző feladatokban tekintett konvoluciót csak akkor használhatjuk, ha olyan valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét akarjuk kiszámolni, amelyek függetlenek. Ez az oka annak, hogy a következő feladat megoldásában nem használhatjuk a konvoluciót, hanem más módszert kell alkalmaznunk.

10. Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x \le 0$. Számítsuk ki a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét.

    Megoldás: Jelölje $G(x)$ a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a $G(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) + \xi^2(\omega) < x\})$ eloszlásfüggvényt kell kiszámolni az $F(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében. Viszont, ha ismerjük egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, akkor az meghatározza a $P(\omega\colon \xi(\omega) \in B)$ halmazok valószínűségét minden ,,szép", azaz Borel mérhető B halmazra. Vegyük észre, hogy jelen feladatban is ilyen jellegű problémát kell megoldani. Az ebben a feladatban megjelenő B halmaz egyszerű szerkezetű, és ezért ez a feladat könnyebben megoldható. Tekintsük az $A(\omega, x) = \{\omega\colon \xi(\omega) + \xi(\omega)^2 < x\}$ halmazokat. Ezek valószínűségét kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük az $B(x) = \{y\colon y + y^2 < x\}$ hamazt. Vegyük észre, hogy $B(x) = \{y\colon y_1(x) < y < y_2(x)\}$, ahol $y_1(x) = \dfrac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$ és $y_2(x) = \dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$ az $y^2 + y = x$ egyenlet kisebb és nagyobb megoldása, és $A(\omega, x) = \{\omega\colon y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}$. Innen $G(x) = P(\{\omega\colon y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}) = F(y_2(x)) - F(y_1(x))$. Ezért a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P(y_1(x) < \xi < y_2(x)) = P(\xi < y_2(x)) = 1 - e^{-y_2(x)} = 1 - \exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$, és $G(x) = 0$, ha $x \le 0$ függvény. A $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye ennek deriváltja, azaz $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}} \exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$.

    Házi feladat:

    Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Legyen ξ exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz legyen sűrűségfüggvénye $f(x) = e^{-x}$, ha $x \ge 0$, $f(x) = 0$, ha $x \le 0$. Legyen η egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumban, azaz legyen sűrűségfüggvénye $g(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $g(x) = 0$, ha $x > 1$ vagy $x < 0$. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.