

## A márius 6-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

*Feladatok:*

1. Adjunk egyszerű, a binomiális eloszlás valószínűségi tartalmát kihasználó bizonyítást arra, hogy a  $B(n, p)$  és  $B(m, p)$  binomiális eloszlások konvolúciója a  $B(n+m, p)$  binomiális eloszlás.

*Megoldás:* Dobjunk fel egy pénzdarabot, mely  $p$  valószínűséggel esik a fej és  $1-p$  valószínűséggel az írás oldalára  $n+m$  alkalommal egymástól függetlenül. Jelölje,  $S$  az első  $n$  dobásban,  $T$  az  $n+1$ -től  $n+m$ -ig tartó dobásokban,  $U$  pedig az  $n+m$  dobásban megjelenő fej-dobások számát. Ekkor  $S$  és  $T$  függetlenek,  $U = S + T$ , továbbá  $S \sim B(n, p)$ ,  $T \sim B(m, p)$  és  $U \sim B(n+m, p)$  eloszlású valószínűségi változó. Innen és a konvolúció valószínűségi tartalmából következik a feladat állítása.

2. Számítsuk ki egy  $B(n, p)$  eloszlású  $\xi$  valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét az e fogalmakat definiáló összegek kiszámításának a segítségével.

*Megoldás:*

$$E\xi = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad E\xi^2 = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

és  $\text{Var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$ . Ezeket a kifejezéseket kell kiszámolnunk. Vegyük észre, hogy  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ ,  $k^2 \binom{n}{k} = k \binom{n}{k} + k(k-1) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} + n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ . Innen

$$\begin{aligned} E\xi &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np(1 + (1-p))^{n-1} = np, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\xi^2 &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} + n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{n-k-2} \\ &= np + n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{(n-2)-k} \\ &= np + n(n-1)p^2(p + (1-p))^{n-1} = np + (n^2 - n)p^2, \end{aligned}$$

és  $\text{Var } \xi = np + (n^2 - n)p^2 - n^2p^2 = np(1-p)$ .

*Házi feladat:*

Legyen  $(\xi_1, \dots, \xi_r)$  polinomiális eloszlású véletlen vektor  $n$  és  $p_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ ,  $\sum_{j=1}^r p_j = 1$  paraméterekkel. Ekkor  $E\xi_j = np_j$ ,  $\text{Var } \xi_j = np_j(1 - p_j)$ ,  $1 \leq j \leq r$  és  $\text{Cov}(\xi_j, \xi_k) = -np_j p_k$ ,  $1 \leq j, k \leq r$ ,  $j \neq k$ .

3. Bizonyítsuk be valószínűségi megfontolások segítségével, hogy egy  $r_1$  és  $p$  paraméterű valamint egy  $r_2$  és  $p$  paraméterű negatív binomiális eloszlás konvolúciója egy  $r_1 + r_2$  és  $p$  paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségeloszlás. Következésképpen, egy  $r$  és  $p$  paraméterű negatív binomiális eloszlás előáll mint  $r$  darab  $p$  paraméterű geometriai eloszlás konvolúciója.

*Megoldás:* Dobjunk fel egy pénzdarabot, mely  $p$  valószínűséggel esik a fej és  $1 - p$  valószínűséggel az írás oldalra végtelen sokszor egymástól függetlenül. Definiáljuk a  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , valószínűségi változókat úgy, hogy  $\xi_j = 1$ , ha a  $j$ -ik dobás eredménye fej,  $\xi_j = 0$ , ha a  $j$ -ik dobás eredménye írás. Legyen  $Z_1$  az a valószínűségi változó, amelyik azt jelöli, hogy hanyadik dobásban jelenik meg az  $r_1$ -ik fejdobás, és legyen  $\eta_j = \xi_{Z_1+j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Azaz az  $\eta_j$  valószínűségi változó azt jelöli, hogy a  $r_2$ -ik fejdobás utáni  $j$ -ik dobás fej vagy írás. Ekkor egyrészt  $Z_1$  negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó  $r_1$  és  $p$  paraméterrel. Másrészt az  $\eta_1, \eta_2, \dots$  valószínűségi változók függetlenek a  $Z_1$  valószínűségi változótól, és az  $\eta_1, \eta_2, \dots$  és  $\xi_1, \xi_2, \dots$  véletlen sorozatok (véges dimenziós) eloszlásai megegyeznek. (Miért? Tekintsük az  $\eta_1, \eta_2, \dots$  véletlen sorozat (véges dimenziós) feltételes eloszlásait a  $Z_1 = n$  feltétel mellett tetszőleges  $n$  egész számra.)

Legyen  $Z_2$  az az index, mely azt jelöli, hogy hanyadik  $j$  indexre jelenik meg az  $\eta_1, \eta_2, \dots$  sorozatban az  $r_2$ -ik 1-es szám. Ekkor  $Z_2$  független  $Z_1$ -től,  $Z_2$  negatív binomiális eloszlású  $r_2$  és  $p$  paraméterrel. Továbbá,  $Z_1 + Z_2$  negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó  $r_1 + r_2$  és  $p$  paraméterrel, mert ez jelöli, hogy hanyadik dobásra jelent meg az  $r_1 + r_2$ -ik fejdobás. Innen következik a negatív binomiális eloszlások konvolúciójára megfogalmazott állítás.

Ebből az állításból egyszerű indukció segítségével be lehet látni, hogy egy  $r$  és  $p$  paraméterű negatív binomiális eloszlás előáll mint  $r$  darab  $p$  paraméterű geometriai eloszlás konvolúciója.

4. Számítsuk ki egy  $n$  és  $p$  paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét annak az ismeretnek a segítségével, hogy egy  $p$  paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke  $\frac{1}{p}$  és szórásnégyzete  $\frac{1-p}{p^2}$ .

*Megoldás:* Tekintsünk  $n$  darab független geometriai eloszlású valószínűségi változót  $p$  paraméterrel. Ezek összege negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó  $n$  és  $p$  paraméterrel. Mivel a várható érték és szórásnégyzet független valószínűségi változók összegére összeadódik, innen követkeik, hogy a keresett várható érték és szórásnégyzet  $\frac{n}{p}$  és szórásnégyzete  $\frac{n(1-p)}{p^2}$ .

5. Lássuk be, hogy amennyiben egy  $\xi$  valószínűségi változó generátorfüggvénye valamely  $g(x)$  függvény, akkor  $E\xi = g'(1)$ ,  $\text{Var } \xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$ , ahol az általános esetben a  $g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g'(x)$  és  $g''(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g''(x)$  képletek definiálják ezeket a mennyiségeket. Számoljuk ki egy  $r$  és  $p$  paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, felhasználva, hogy e valószínűségi változó generátorfüggvénye a  $\left(\frac{px}{1 - (1-p)x}\right)^r$  függvény.

*Megoldás:* A  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$  függvény két egymásutáni deriválása és az  $x = 1$  helyettesítés adja, hogy  $g'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = E\xi$ ,  $g''(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k = E\xi(\xi - 1)$ . Mint azt az előadáson megtárgyaltuk az analízis bizonyos eredményei lehetővé teszik a fent alkalmazott tagonkénti deriválást. Ezért  $E\xi = g'(1)$ ,  $E\xi^2 = g''(1) + g'(1)$ , és  $\text{Var } \xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$ .

Az  $r$  és  $p$  paraméterű negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye

$$g(x) = \left(\frac{px}{1 - (1-p)x}\right)^r.$$

Innen

$$g'(x) = rp \left(\frac{px}{1 - (1-p)x}\right)^{r-1} \frac{1}{(1 - (1-p)x)^2},$$

$$g''(x) = r(r-1)p^2 \left(\frac{px}{1 - (1-p)x}\right)^{r-2} \frac{1}{(1 - (1-p)x)^4} + rp \left(\frac{px}{1 - (1-p)x}\right)^{r-1} \frac{2(1-p)}{(1 - (1-p)x)^3}.$$

Behelyettesítéssel  $E\xi = \frac{r}{p}$ ,  $g''(1) = \frac{r^2 + r}{p^2} - \frac{2r}{p}$ ,  $\text{Var } \xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$ .

6. Mutassunk példát olyan  $\mathcal{P} = \{p_k : k = 1, 2, \dots\}$ ,  $p_k \geq 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ , valószínűség eloszlásra a nem negatív egész számokon, melynek  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$  generátorfüggvénye semmilyen  $\varepsilon > 0$  szám esetén nem konvergens a  $-1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$  intervallumon.

*Megoldás:* Legyen  $\alpha > 1$  tetszőleges szám. Ekkor  $C(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$ , és  $p_k = p_k(\alpha) = \frac{1}{C(\alpha)k^\alpha}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , valószínűségeloszlás. Ennek generátorfüggvénye a

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k x^k = \frac{1}{C(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^\alpha}$  semmilyen  $\varepsilon > 0$  számra nem konvergál a  $-1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$  intervallumon, mert minden  $x > 1$  számra  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k}{k^\alpha} = \infty$ .

*Házi feladat:*

Legyen  $\xi$  geometriai eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen  $P(\xi = k) = p(1 - p)^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Lássuk be, hogy  $\xi$  teljesíti a következő (diszkrét) örökifjú tulajdonságot.

$$P(\xi = k + l | \xi > l) = p(1 - p)^{k-1} = P(\xi = k).$$

7. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy a lottóban pontosan három találatunk lesz.

*Megoldás:* Ez a valószínűség  $\frac{\binom{85}{2} \binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}$ . Ugyanis  $\binom{85}{2} \binom{5}{3}$  az összes olyan kitöltések száma mely hármas találatot eredményez (a ki nem húzott számokból kettőt, a kihúzott számokból hármat kell választani), az összes kitöltések száma  $\binom{90}{5}$ , és minden kitöltés egyforma valószínű.

8. Számoljuk ki egy  $N$ ,  $M$  és  $n$  paraméterű hipergeometrikus eloszlású  $\xi$  valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, azaz egy olyan valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, melyre

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Mutassuk meg, hogy  $E\xi = n \frac{M}{N}$ ,  $\text{Var } \xi = \frac{nM}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{n-n}{N-1}$ .

*Segítség:* Tekintsünk egy urnamodellt, melyben  $\xi$  jelöli azt, hogy  $N$  piros és  $N - M$  fehér golyóból  $n$  visszatevés nélküli húzásban hány piros golyót húzunk. Legyen  $\xi_j = 1$ , ha a  $j$ -ik húzás eredménye piros,  $\xi_j = 0$ , ha a  $j$ -ik húzás eredménye fehér,  $1 \leq j \leq n$ . Ekkor a  $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j$  valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Hogyan kell ezt csinálni? Emlékezzünk arra, hogy mint korábban megmutattuk, ebben a modellben annak a valószínűsége, hogy valamely húzás(ok)ban piros golyót húzunk nem függ attól, hogy hanyadik húzást tekintettük.

*Megoldás:* Tekintsünk egy urnát, mely  $M$  piros és  $N - M$  fehér golyót tartalmaz, és húzzunk ki  $n$  golyót visszatevés nélkül. Legyen  $\xi_j = 1$ , ha a  $j$ -ik húzás

piros,  $\xi_j = 0$ , ha a  $j$ -ik húzás fehér. Ekkor a megoldandó feladat ekvivalens az  $S = \sum_{j=1}^n \xi_j$  várható értékének és szórásnégyzetének a kiszámolásával. Viszont már

korábbi eredményekből következik, hogy  $E\xi_j = \frac{M}{N}$ ,  $\text{Var } \xi_j = \frac{M}{N} - \left(\frac{M}{N}\right)^2$  min-

den  $1 \leq j \leq N$  indexre, továbbá,  $\text{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{M}{N} \frac{M-1}{N-1} - \left(\frac{M}{N}\right)^2$  minden  $1 \leq j, k \leq n$ ,  $j \neq k$  számpárra. A várható érték additivitásából következik, hogy  $ES = \frac{nM}{N}$ . (Itt nincs szükség az összeadandók függetlenségének a feltételezésére.)

Az összeg szórásnégyzetének kiszámítására tanult általános képletből, (amikor az összeadandók nem feltétlenül függetlenek) és a fenti formulákból következik, hogy

$$\begin{aligned} \text{Var } S &= n\text{Var } \xi_1 + n(n-1)\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) \\ &= n\left(\frac{M}{N} - \left(\frac{M}{N}\right)^2\right) + n(n-1)\left(\frac{M}{N} \frac{M-1}{N-1} - \left(\frac{M}{N}\right)^2\right) \\ &= n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N} - (n-1)\frac{N-M}{(N-1)N}\right) \\ &= n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}. \end{aligned}$$

9. Ha  $N \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = p$ ,  $0 < p < 1$ ,  $n$  rögzített egész szám, akkor

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{minden } 0 \leq k \leq n \text{ számra.}$$

*Megoldás:*

$$\begin{aligned} &\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \frac{(N-M)\cdots(N-M-n+k+1)}{(N-k)\cdots(N-n+1)} \\ &\rightarrow \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{ha } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

mert  $\frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \rightarrow p^k$ , és  $\frac{(N-M)\cdots(N-M-n+k+1)}{(N-k)\cdots(N-n+1)} \rightarrow (1-p)^{n-k}$ , ha  $N \rightarrow \infty$ .

Házi feladat:

Legyenek  $\xi_1, \dots, \xi_L$  és  $\eta_1, \dots, \eta_M$  valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy

$$\text{Cov} \left( \sum_{j=1}^L \xi_j, \sum_{k=1}^M \eta_k \right) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \text{Cov} (\xi_j, \eta_k).$$

10. Legyen  $(\xi_1, \dots, \xi_r)$  véletlen vektor polihipergeometrikus eloszlású  $N_1, \dots, N_r$  és  $n$  paraméterekkel. Számítsuk ki az  $E\xi_j$  várható értékeket, a  $\text{Var} \xi_j$  szórásnégyzetet minden  $1 \leq j \leq r$  számra és a  $\text{Cov} (\xi_j, \xi_k)$  kovarianciafüggvényt, ha  $1 \leq j, k \leq r$ ,  $j \neq k$ .

*Segítség:* A hipergeometrikus eloszlásról szóló hasonló feladat módszere természetes módon adaptálható ebben az esetben is.

*Megoldás:* Számítsuk ki először a  $\text{Cov} (\xi_j, \xi_k)$  kovarianciafüggvényt. Ennek érdekében tekintsünk egy urnát, benne  $N_1$  1-es,  $N_2$  2-es,  $\dots$ ,  $N_r$   $r$ -es színű golyót, és húzzunk ki belőlük  $n$ -et visszatevés nélkül. Legyen  $N = \sum_{k=1}^r N_k$ , és vezessük be a következő  $\eta_{l,s}$ ,  $1 \leq l \leq n$ ,  $1 \leq s \leq r$ , valószínűségi változókat:  $\eta_{l,s} = 1$ , ha az  $l$ -ik húzásban  $s$ -es színű golyót húzzunk, és  $\eta_{l,s} = 0$ , ha az  $l$ -ik húzás eredménye más. Definiáljuk a  $\xi_s = \sum_{l=1}^n \eta_{l,s}$  véletlen összegeket,  $1 \leq s \leq r$ . Ekkor a  $\text{Cov} (\xi_j, \xi_k)$  kovarianciafüggvényt kell kiszámolnunk az előbb definiált valószínűségi változókkal.

Ezt a hipergeometrikus eloszlás esetén alkalmazott érvelés természetes adaptációjával és az előző házi feladat eredményének felhasználásával tehetjük meg.

Először ki kell számolnunk az  $\text{Cov} (\eta_{l,j}, \eta_{l',k})$  kovarianciafüggvényeket. Külön kell választani az  $l = l'$  és  $l \neq l'$  eseteket. Mind a két esetben használhatjuk azt a tényt, hogy hasonlóan a két színű golyót tartalmazó urnamodellhez annak, hogy milyen valószínűséggel húzok bizonyos előírt színű golyókat adott húzásban nem függ attól, hogy hanyadik húzást tekintettük. Miért?

Az  $l = l'$  esetben

$$\begin{aligned} \text{Cov} (\eta_{l,j}, \eta_{l,k}) &= P (\eta_{l,j} = 1, \eta_{l,k} = 1) - P (\eta_{l,j} = 1) P (\eta_{l,k} = 1) \\ &= -P (\eta_{1,j} = 1) P (\eta_{1,k} = 1) = -\frac{N_j N_k}{N^2}. \end{aligned}$$

Ha  $l \neq l'$ , akkor

$$\begin{aligned} \text{Cov} (\eta_{l,j}, \eta_{l',k}) &= P (\eta_{l,j} = 1, \eta_{l',k} = 1) - P (\eta_{l,j} = 1) P (\eta_{l',k} = 1) \\ &= P (\eta_{1,j} = 1, \eta_{2,k} = 1) - P (\eta_{1,j} = 1) P (\eta_{1,k} = 1) \\ &= \frac{N_j N_k}{N(N-1)} - \frac{N_j N_k}{N^2}. \end{aligned}$$

Innen, illetve az előző házi feladatban megfogalmazott eredmény alapján

$$\text{Cov}(\xi_j, \xi_k) = -n \frac{N_j N_k}{N^2} + n(n-1) \left( \frac{N_j N_k}{N(N-1)} - \frac{N_j N_k}{N^2} \right) = n \frac{(n-N)N_j N_k}{(N-1)N^2}.$$

Az  $E\xi_j$  és  $\text{Var} \xi_j$  mennyiségeket is ki lehet számítani hasonlóan, de erre nincs szükség. Ha csak azt vesszük figyelembe, hogy az  $l$ -ik húzásban  $j$ -es vagy más színű golyót húztunk-e, azaz csak az  $\eta_{j,l}$  valószínűségi változókkal dolgozunk, akkor rövid meg gondolás után láthatjuk, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a (két színnel rendelkező) hipergeometrikus eloszlást modellező urnamodellel esetén  $M = N_j$  és  $N - M = N - N_j$  paraméterekkel. Ezért  $E\xi_j = n \frac{N_j}{N}$ ,  $\text{Var} \xi_j = n \frac{N_j}{N} \left( 1 - \frac{N_j}{N} \right) \frac{N-n}{N-1}$ .

11. Mutassuk meg, hogy a Poisson eloszlás generátorfüggvényének alakjából látható, hogy ha  $\xi$  és  $\eta$  két független,  $\lambda$  illetve  $\mu$  paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor  $\xi + \eta$   $\lambda + \mu$  paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

*Megoldás:* Jelölje  $g_\lambda(x)$  a  $\lambda$  paraméterű Poisson eloszlás generátorfüggvényét. Láttuk, hogy  $g_\lambda(x) = e^{\lambda(x-1)}$ . Innen látszik, hogy  $g_{\lambda+\mu}(x) = g_\lambda(x)g_\mu(x)$ . Innen viszont, mint azt az előadáson megbeszéltük következik a feladat állítása.

12. Legyen adva  $k$  darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen  $\xi$  számú golyót, ahol  $\xi$  Poisson eloszlású valószínűségi változó  $\lambda > 0$  paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a  $\xi$  valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az  $j$ -ik urnába  $p_j \geq 0$  valószínűséggel esik,  $j = 1, \dots, k$ ,  $\sum_{j=1}^k p_j = 1$ . Jelölje  $\eta_j$  a  $j$ -ik urnába eső golyók számát. Ekkor az  $\eta_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  valószínűségi változók függetlenek, és  $\eta_j$  Poisson eloszlású  $\lambda p_j$  paraméterrel,  $j = 1, \dots, k$ .

*Megoldás:*

$$\begin{aligned} P(\eta_1 = l_1, \dots, \eta_k = l_k) &= P(\xi = l_1 + \dots + l_k) \frac{(l_1 + \dots + l_k)!}{l_1! \dots l_k!} p_1^{l_1} \dots p_k^{l_k} \\ &= \frac{\lambda^{(l_1 + \dots + l_k)}}{l_1! \dots l_k!} p_1^{l_1} \dots p_k^{l_k} e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^{l_1} \dots \lambda^{l_k}}{l_1! \dots l_k!} p_1^{l_1} \dots p_k^{l_k} e^{-\lambda(p_1 + \dots + p_k)} = \prod_{j=1}^k \frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!} e^{-\lambda p_j} \end{aligned}$$

tetszőleges  $l_1 \geq 0, \dots, l_k \geq 0$  egész számokra. Innen adódik az állítás.

13. Lássuk be az előző feladat segítségével a következő állítást:

Legyen adva  $\xi$  Poisson eloszlású valószínűségi változó  $\lambda$  paraméterrel. Dobjunk le egymástól és a  $\xi$  valószínűségi változótól függetlenül véletlenül egyenletesen  $\xi$  darab pontot az egységintervallumra, azaz tegyük fel, hogy minden pont  $b - a$

valószínűséggel esik valamely  $[a, b] \subset [0, 1]$  intervallumba. Ekkor a  $[0, 1]$  intervallum tetszőleges felbontására  $[s_0, s_1], [s_1, s_2], \dots, [s_{k-1}, s_k]$  intervallumokra,  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ , az egyes intervallumokba eső pontok száma egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változó  $s_j - s_{j-1}$ ,  $1 \leq j \leq k$ , paraméterrel.

*Megoldás:* Tekintsük a következő urnamodellt. Tekintünk  $\xi$  számú golyót, tehát annyit, ahány ledobott pontot tekintettünk az előző feladatban. Tegyük az  $l$ -ik golyót a  $j$ -ik urnába, ha a  $l$ -ik pont az  $[s_{j-1}, s_j]$  intervallumba esett,  $1 \leq j \leq k$ . Akkor az előző feladat eredménye alapján az egyes urnákba eső golyók száma egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változó  $s_j - s_{j-1}$ ,  $1 \leq j \leq k$ , paraméterrel. Innen következik a feladat állítása.

*Házi feladat:*

Legyenek  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , független Poisson eloszlású valószínűségi változók  $\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , paraméterekkel. Mutassuk meg, hogy

$$P \left( \xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r \mid \sum_{j=1}^r \xi_j = n \right) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} \prod_{j=1}^r \frac{\lambda_j^{k_j}}{\left( \sum_{s=1}^r \lambda_s \right)^{k_j}},$$

ha  $\sum_{j=1}^r k_j = n$ . Azaz a  $\xi_1, \dots, \xi_r$  vektor feltételes eloszlása feltéve, hogy  $\sum_{j=1}^r k_j = n$

a polinomiális eloszlás  $n$  és  $p_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^r \lambda_s}$ ,  $1 \leq j \leq r$ , paraméterekkel.