A december 4-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Ezen a gyakorlaton is elsősorban azzal foglalkozunk, hogy hogyan lehet megérteni annak a jegyzetnek néhány eredményét, mely a vizsgan kérdezett anyagot tartalmazza.

Néhány további megjegyzés a centrális határeloszlástételhez.

A 8. fejezet két legfontosabb eredménye a 8.1 és 8.2 tétel. Ezek jobb megértése érdekében teszek néhány megjegyzést. Emlékezzünk, hogy F_n eloszlások akkor és csak akkor konvergálnak egy F eloszláshoz, ha $\int g(u)F_n(\,du) \to \int g(u)F(\,du)$ minden folytonos és korlátos $g(\cdot)$ függvényre. A 8.1 tétel ilyen állítást fogalmaz meg. (Jegyezzük meg, hogy $(Eg(\tilde{S}_n) = \int g(u)F_n(\,du)$, ha F_n jelöli $\tilde{S}_n$ eloszlását). De ebben az eredményben a $g(\cdot)$ függvényről többet követeltünk meg, azt hogy legyen háromszor folytonosan differenciálható. A 8.2 tétel arról szól, hogy bizonyos standard, de technikailag meglehetősen nehéz és fárasztó simítási eljárással hogyan lehet az általános folytonos függvények esetét erre a speciális esetre redukálni. Erre nem térek ki. Akinek nincs ideje, energiája azt áttanulmányozni, és a vizsgán ezt kérdezik tőle, hivatkozzon arra, hogy én azt mondtam, hogy ez fölösleges. Ha tudjuk azt az eredményt, hogy eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek konvergenciájából egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéhez következik maguknak az eloszlásfüggvényeknek a konvergenciája is, akkor alkalmazva a 8.1 tételt a $g(x) = g_t(x) = e^{itx}$, $-\infty < t < \infty$, függvényekre megkapjuk a centrális határeloszlástétel Lindeberg féle alakját.

A 8.1 tétel bizonyítása sem egyszerű. Megpróbálok némi fogódzót adni hozzá. Felhasználjuk azt a gyakorlaton is tárgyalt eredményt, hogy független normális eloszlású valószínűségi változók összege is normális eloszlású. Tekintjük a bizonyításban definiált $\tilde{\xi}_{n,k}$ illetve $\tilde{\eta}_{n,k}$ (37. oldal alja) valószínűségi változókat, illetve a belőlük definiált $\tilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_{n,k}$ és $\tilde{T}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\eta}_{n,k}$ összegeket. Azt kell belátni, hogy $Eg(\tilde{S}_n) - Eg(\tilde{T}_n)$ kicsi. Ezt úgy látjuk be, hogy egymásután egyenként a $\tilde{\xi}_{n,k}$ valószínűségi változókat kicseréljük az $\tilde{\eta}_{n,k}$ változókkal és becsüljük a csere előtti és utáni valószínűségi változók $g(\cdot)$ függvényének a várható értékét. Ez történik tulajdonképpen az $U_{n,l}$ valószínűségi változók illetve a $\Delta_{n,l}$ számok bevezetésével. A 8.1 Tétel bizonyításának a lényege az, hogy jó becslést adunk a $\Delta_{n,l}$ mennyiségekre. Ez hasonlóan a gyakorlaton tárgyalt hasonló, (egyszerűbb) feladatokhoz Taylor sorfejtéssel történhet. Kissé talán rejtve, de ez történik az $R(x,y)$ függvények bevezetésénél. Továbbá hasonlóan a gyakorlaton tárgyalt bizonyításhoz más tagszámú sorfejtést érdemes alkalmazni, ha $|\tilde{\xi}_{n,l}| < \varepsilon$ és $|\tilde{\xi}_{n,l}| \ge \varepsilon$, illetve ugyanez mondható a $\tilde{\eta}_{n,l}$ függvényekre.

A több-dimenziós normális eloszlásról.

Az első kérdés, ami e fogalom kapcsán felmerül az, hogy miért fontos ez a fogalom. A természetes válasz az, hogy a centrális határeloszlástétel, illetve annak több-dimenziós változata indokolja e fogalom bevezetését. A centrális határeloszlástétel azt mondja, hogy független valószínűségi változók normalizált összegeinek a határeloszlása nagyon általános feltételek mellett mindig ugyanaz a normális eloszlás. Felmerül az a kérdés, hogy érvényes-e ennek az eredménynek egy olyan alkalmas megfelelője, amelyik vektor értékű független valószínűségi változók normalizált összegeiről szól.

Erre a kérdésre pozitív választ lehet adni, és ez fontos szerepet játszik néhány olyan fontos kérdés vizsgálatában mint a chi-négyzet próba. Az eredmény illetve a több-dimenziós normális eloszlásfüggvény fogalmának a megértéséhez szükséges először megérteni a várható érték illetve a szórásnégyzet fogalmának több-dimenziós megfelelőjét. A nehezebb és tárgyalandó feladat a szórásnégyzet több-dimenziós megfelelőjének, a kovarianciamátrixnak a definiciója.

A kovarianciamátrix definiciója. *Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ egy k-dimenziós véletlen vektor, melynek minden koordinátájára teljesül az $E\xi_j^2 < \infty$, $1 \le j \le k$, feltétel. Ekkor a ξ k-dimenziós valószínűségi változó D kovarianciamátrixa az a $k \times k$ mátrix, melynek j-ik sorában és l-ik oszlopában a $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_l) = E\xi_j\xi_l - E\xi_j E\xi_l$, $1 \le j, l \le k$, szám áll.*

A kovarianciamátrix hasonlóan viselkedik mint annak egy dimenziós megfelelője, a szórásnégyzet. Így például független vektorok összegének a kovarianciamátrixa megegyezik az összeadandók kovarianciamátrixának az összegével, ha egy vektort megszorzunk egy c számmal, akkor annak kovarianciamátrixa a c^2 számmal szorzódik meg. Ezenkívül fontos a következő eredmény.

Tétel a kovarianciamátrix jellemzéséről. *Egy k-dimenziós véletlen vektor kovarianciamátrixa $k \times k$ méretű szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix. Egy szimmetrikus $D = (d_{j,l})$, $1 \le j, l \le k$ $k \times k$ méretű mátrixot pozitív szemidefinitnek nevezünk, ha minden $x = (x_1, \dots, x_k)$ k-dimeziós vektorra $xDx^* = \sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{l=1}^{k} x_j x_l d_{j,l} \ge 0$. Megfordítva, minden D $k \times k$ méretű pozitív definit mátrixhoz és m k–dimenziós vektorhoz létezik olyan k–dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, melynek a várható értéke m, kovarianciamátrixa pedig D. Sőt az is igaz, hogy egy több-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor eloszlását egyértelműen meghatározza annak várható értéke és kovarianciamátrixa.*

Annak érdekében, hogy ezt az eredményt megértsük fel kell idéznünk a több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó fogalmát.

A több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó definiciója. *Ha ξ_1, ..., ξ_k független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor a segítségükkel definiált $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektort k-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változónak nevezzük. Ha ξ k-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó, A tetszőleges $k \times k$ méretű mátrix m k-dimenziós véletlen vektor, akkor $\eta = \xi A + m$ k-dimenziós normális eloszlású vektor. Akkor nevezünk egy véletlen vektort k-dimenziós normális eloszlású véletlen vektornak, ha annak eloszlása megegyezik egy előbb definiált $\eta = \xi A + m$ alakú k-dimenziós normális eloszlású vektor eloszlásával.*

Be lehet látni, hogy igaz a következő eredmény.

Tétel. *Az előbb definiált $\eta = \xi A + m$ alakú k-dimenziós normális eloszlású vektor várható értéke m kovarianciamátrixa pedig a $D = AA^*$ mátrix. Karakterisztikus függvénye a*

$$\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_k) = Ee^{i(t,\eta)} = Ee^{i(t_1\eta_1 + \cdots + t_k\eta_k)} = e^{i(t,m) - tDt^*/2}$$

függvény, ahol $t = (t_1, \dots, t_k)$, $(\cdot, \cdot)$ skalárszorzatot * pedig transzponáltat jelöl. Ez utobbi formula azért hasznos, mert egy (több-dimenziós) eloszlást meghatároz annak karakterisztikus függvénye.

Az, hogy tetszőleges valószínűségi vektor kovarianciamátrixa pozitív (szemi)definit viszonylag egyszerűen látható. Tekintsünk ugyanis egy $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektort, és jelölje Σ ennek kovarianciamátrixát. Vegyünk tetszőleges $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ valós számokból álló vektort, és definiáljuk az $\eta = \eta(\alpha) = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \xi_j$ valószínűségi változót. Tudjuk, hogy $\operatorname{Var} \eta \geq 0$. Be lehet látni, hogy $\operatorname{Var} \eta = \alpha \Sigma \alpha^*$. Ezért $\alpha \Sigma \alpha^* \geq 0$ minden α vektorra, és ez jelenti azt, hogy Σ pozitív szemidefinit.

Annak bizonyítása, hogy tetszőleges D pozitív szermidefinit mátrix megjelenik mint alkalmas normális eloszlású valószínűségi vektor kovarianciamátrixa már nehezebb. Ez következik egyrészt az előbb kimondott tételből, továbbá a következő lineáris algebrai eredményből.

Tétel. *Egy szimmetrikus D pozitív szemidefinit mátrixból lehet "négyzetgyököt vonni", azaz a $D = AA^*$ egyenletnek van megoldása. Ez a megoldás nem egyértelmű. Valóban, ha U unitér mátrix, azaz $UU^* = U^*U = I$, akkor az $\bar{A} = AU$ mátrixra is igaz, hogy $\bar{A}\bar{A}^* = D$, ha $D = AA^*$.*

Ezek az eredmények azt is jelentik, hogy bár egy előírt eloszlású normális eloszlású véletlen vektor $\eta = \xi A + m$ reprezentációjában az A mátrix megadása nem egyértelmű, mégis a D kovarianciamátrix és m várható érték meghatározza a véletlen vektor eloszlását, mert meghatározza annak karakterisztikus függvényét. Annak, hogy egy normális eloszlású véletlen vektor eloszlását meghatározza annak várható értéke és kovarianciamátrixa az alábbi fontos következménye is van. (Lásd a 10.5 következményt a jegyzetben.)

Tétel. *Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ normális eloszlású véletlen vektor, melynek első l és utolsó $k-l$ koordinátája korrelálatlan valamely $1 \leq l < k$ számra, azaz $E\xi_p\xi_q = E\xi_p E\xi_q$, ha $1 \leq p \leq l < q \leq k$. Ekkor a $(\xi_1, \dots, \xi_l)$ illetve $(\xi_{l+1}, \dots, \xi_k)$ vektorok függetlenek.*

Ez utóbbi eredmény kiolvasható abból a tényből, hogy az adott feltétel mellett a ξ véletlen vektor karakterisztikus függvénye faktorizálódik. Jegyezzük meg, hogy független valószínűségi változók mindig korrelálatlanok, de az állítás megfordítása nem igaz. Léteznek olyan valószínűségi változók, melyek korrelálatlanok, de nem függetlenek. Ez a tény rámutat a normális eloszlású valószínűségi vektorok egyik különleges tulajdonságára; arra, hogy ebben a speciális esetben a koordináták korrelálatlanságából következik azok függetlensége is.

Végül a teljesség kedvéért fogalmazzuk meg a több-dimenziós centrális határeloszlástételt független egyforma eloszlású véletlen vektorok összegére.

Több dimenziós centrális határeloszlástétel. *Legyenek* $\xi^{(j)} = \left(\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_k^{(j)}\right)$, $j = 1, 2, \dots$, *független egyforma eloszlású k-dimenziós véletlen vektorok*

$$M = \left(E\xi_1^{(j)}, \dots, E\xi_k^{(j)}\right)$$

várható értékkel és Σ kovarianciamátrix-szal. Legyen $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^{(j)}$. *Ekkor az* $\dfrac{S_n - nM}{\sqrt{n}}$ *véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak egy nulla várható értékű és Σ kovarianciamátrixú nomális eloszlású véletlen vektorhoz.*

Megjegyzések a függetlenség és Kolmogorov 0–1 törvénye fejezethez.

Először értsék meg σ-algebráknak a 2.1 definicióban megadott függetlenségét. Itt szerepel események illetve valószínűségi változók függetlensége is. Én ez utóbbiakat tételnek nevezném. Nevezetesen arról van szó, hogy a korábban tanult σ-algebrák fogalma nélkül definiált függetlenség definiciója megegyezik az itt megadottal. E fejezet megértéséhez elengedhetetlen a farok σ-algebra 2.2 definiciója. A legérdekesebb eset, és gyakorlatilag az összes tekintett példa olyan, amelyikben bizonyos valószínűségi változók által generált σ-algebrát tekintünk. Ekkor a farok σ-algebra szemléletes tartalma az, hogy ez azon eseményekből áll, melyek be vagy be nem következtét meg tudjuk állapítani akkor is, ha ezen valószínűségi változók közül néhánynak az értékét nem ismerjük. Például az az esemény, hogy valószínűségi változók átlaga kisebb mint egy rögzített x szám nem függ véges sok az átlagban résztvevő valószínűségi változó értékétől. A fejezet fő eredménye a 2.6 Tétel, a Kolmogorov féle 0–1 törvény. Ez azt mondja ki, hogy független σ-algebrák, speciálisan független valószínűségi változók által generált σ-algebrák farok σ-algebrája olyan eseményekből áll, melyeknek valószínűsége nulla vagy egy. A bizonyítás eszméje a következő: Tekintünk egy rögzített A eseményt a farok σ-algebrában, és keresünk olyan (halmaz) algebrákat illetve σ-algebrákat, melyeknek elemei függetlenek ettől az A halmaztól. Belátjuk bizonyos analízis segítségével, hogy a farok σ-algebra eseményei ilyenek. Az állítás bizonyításában kulcsszerepet játszik mértékek kiterjeszteésének egyértelműsége algebráról az általa generált σ-algebrára. Ez azt jelenti speciálisan, hogy az A halmaz önmagától is független, azaz $P(A) = P(A)^2$, és innen következik a kívánt állítás. Feltétlenül javaslom, hogy nézzék át a fejezetben szereplő példákat is. A fejezetben szereplő Borel–Cantelli lemma megegyezik a bevezető valószínűségszámításban szereplő hasonló nevű eredménnyel.

Konvergenciafogalmak a valószínűségszámításban. A nagy számok erős és gyenge törvénye.

Először idézzük fel e fogalmak definicióit. Megjegyzem, hogy az egy valószínűségű konvergenciát majdnem mindenütt való a sztochasztikus konvergenciát pedig mértékben való konvergenciának is hívják.

Az egy valószínűségű konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1,2,\dots,$ sorozata akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt)*

$$P\left(\omega\colon \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1.$$

A sztochasztikus konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1,2,\dots,$ sorozata akkor konvergál sztochasztikusan egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt) minden $\varepsilon > 0$ számra*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right) = 0.$$

Az eloszlásban való konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1,2,\dots,$ sorozata akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez vagy az ezen eloszlásfüggvény által meghatározott eloszláshoz, ha $\lim\limits_{n\to\infty} P(\xi_n < u) = F(u)$* minden olyan u számra, ahol az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény függvény folytonos. *(Azt mondjuk, hogy a ξ_n, $n = 1,2,\dots,$ valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál egy ξ valószínűségi változóhoz, ha ez a sorozat eloszlásban konvergál az $F(u) = P(\xi < u)$ eloszlásfüggvényhez.)*

Eloszlásfüggvények $F_n(u)$ sorozata akkor és csak akkor konvergál egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha valószínűségi változók olyan ξ_n, $n = 1,2,\dots,$ sorozata, melyekre ξ_n eloszlása $F_n(u)$ eloszlásban konvergálnak az $F(u)$ eloszlásfüggvényhez. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(u) = F(u)$ az $F(\cdot)$ függvény minden folytonossági pontjában.

Igaz a következő kapcsolat: Egy valószínűségi konvergencia $\Rightarrow$ Sztochasztikus konvergencia $\Rightarrow$ Eloszlásban való konvergencia.

Megmutatjuk hogy, ha $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ egy valószínűséggel, akkor definiálva az $A_n = A_n(\varepsilon) = \left\{\omega\colon \sup\limits_{k\ge n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\right\}$ halmazokat kapjuk, hogy az egymásba skatulyázott A_n halmazokra, (azaz $A_1(\omega) \subset A_2 \subset \cdots$), $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$. Ezért $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 1$. Mivel $\{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} \supset A_n$, $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon) \to 1$, azaz $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \ge \varepsilon) \to 0$, ha $n \to \infty$. Ez azt jelenti, hogy az egy valószínűségű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. A jegyzet tartalmazza a következő eredményt is (Lemma 5.7 (i):

Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1,2,\dots,$ sorozata, akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $\eta_n = \sup\limits_{k\ge n} |\xi_k - \xi|$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0$.

Lássunk példát arra, hogy lehetséges olyan ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, és ξ valószínűségi változókat konstruálni, melyekre a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan tart ξ-hez, de a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Tekintsük a következő $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt: Ω a $[0,1]$ intervallum, $\mathcal{A}$ a Borel mérhető halmazok σ-algebrája a $[0.1]$ intervallumon, a P valószínűségi mérték a Lebesgue mérték. Legyen

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left[(n-2^k)2^{-k}, (n+1-2^k)2^{-k}\right] \\ 1 & \text{ha } x \in \left[(n-2^k)2^{-k}, (n+1-2^k)2^{-k}\right] \end{cases}$$
$$\text{akkor ha } 2^k \le n < 2^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

és $\xi(x) = 0$ minden $0 \le x \le 1$ számra. Ekkor $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 2^{-k}$ minden $\varepsilon > 0$ számra, ha $2^k \le n < 2^{k+1}$. Tehát a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan konvergál a ξ valószínűségi változóhoz. Viszont mivel $\limsup_{n\to\infty} \xi_n(x) = 0$ minden $0 \le x \le 1$ számra, ezért a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Azt mondjuk, hogy $\xi_1, \xi_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, ha ezek $S_n = \xi_1 + \cdot + \xi_n$ összegeire $\frac{S_n}{n} \to E\xi_1$ sztochasztikusan, teljesítik a nagy számok erős törvényét, ha $\frac{S_n}{n} \to E\xi_1$ egy valószínűséggel, ha $n \to \infty$. Valójában, olyan becsléseket bizonyítanak, melyek független (esetleg csak korrelálatlan), de nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizált összegéről szólnak.

Az 5.1 illetve 5.2 Tétel tartalmazza a nagy számok gyenge törvényének a bizonyítását. A bizonyítás lényege a Csebisev egyenlőtlenség.

Az itt szereplő eredményekben fontos szerepet játszik az, hogy milyen momentum feltételek teljesülnek az egyes valószínűségi változókra. Az, hogy egy valószínűségi változónak léteznek a magas momentumai azt jelenti, hogy viszonylag kis valószínűséggel vesz fel nagyon nagy értékeket, ezért nem kell attól tartani, hogy néhány tag extrém viselkedése rontja el a nagy számok erős törvényének az érvényességét. Így az 5.5 Tételben négy momentum létezése van feltéve. A nagy számok törvényének az igazán éles és nehezebben bizonyítható alakja a nagy számok Kolmogorov féle erős törvénye, 5.11 tétel. Eszerint az eredmény szerint a nagy számok erős törvényének szükséges és elégséges feltétele az, hogy a valószínűségi változók abszolut értékének legyen véges várható értéke. A bizonyításban szereplő elégségesség bizonyításának alaplépése a Kolmogorov egyenlőtlenség. Ez az egyenlőtlenség ugyanazt a becslést adja arra, hogy független egyforma eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek maximuma nagyobb mint egy x szám, mint amit a Csebisev egyenlőtlenség ad arra, hogy a maximumban résztvevő összegek közül az utolsó nagyobb mint ez az x szám. Egy másik fontos technikai lépés a bizonyításban a (nem valószínűségszámítás tartalmú) Kronecker Lemma ((5.9) Lemma). Ennek bizonyításában az úgynevezett Abel féle átrendezés játszik fontos szerepet, melyet a jegyzetben "parciális szummázás"-nak neveznek.

Érdemes röviden elmagyarázni azt, hogy a nagy számok erős törvényének miért szükséges feltétele az, hogy az összeadandók abszolut értékének legyen véges várható értéke. Azaz tegyük fel, hogy $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Azt állítjuk, hogy amennyiben $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \to c$ valamilyen konstanshoz (vagy valamilyen valószínűségi változóhoz), akkor $E|\xi_1| < \infty$.

Be lehet látni, hogy $E|\xi| < \infty$ akkor és csak akkor, ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(|\xi| > n) < \infty$. Jelölje ugyanis $F(\cdot)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ezzel a jelöléssel $E|\xi| < \infty$ akkor és csak akkor, ha $\int |u|\, dF(u) < \infty$. Továbbá ez az integrál akkor és csak akkor véges, ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nP(n < |\xi| \le n+1) < \infty$. (Miért?) Ezt az összeget átrendezve

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} nP(n < |\xi| \le n+1)) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\left(P(|\xi| > n) - P(|\xi| > n+1)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi| > n)[(n+1) - n] = \sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi| > n)\end{aligned}$$

Innen következik az állítás.

Belátjuk az előző eredmény és a Borel–Cantelli lemma segítségével, hogy ha a $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata olyan, hogy $E|\xi_1| = \infty$, akkor az $\frac{S_n(\omega)}{n}$ sorozat egy valószínűséggel divergens, ahol $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben nem teljesül a nagy számok erős törvénye.

Valóban, ha $E|\xi_1| = \infty$, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(|\xi_1| > n) = \infty$. Továbbá az $\{\omega\colon |\xi_n(\omega)| > n\}$ események függetlenek, ezért a Borel-Cantelli lemma szerint majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén $|\xi_n(\omega)| > n$ végtelen sok n indexre.

Ha $\omega \in \Omega$ olyan pont, melyben az $\frac{S_n(\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots,$ sorozat konvergens, akkor ebben az ω pontban $\sup\limits_{1\le n<\infty} \left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| < K(\omega)$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{S_{n+1}(\omega)}{n+1} - \frac{S_n(\omega)}{n}\right) = 0$. Viszont, $\frac{S_{n+1}(\omega)}{n+1} - \frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{\xi_{n+1}(\omega)}{n+1} + \frac{S_n(\omega)}{n(n+1)}$, és $\frac{S_n(\omega)}{n(n+1)} \to 0$, $|\xi_{n+1}(\omega)| < n+1$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, ha az $\frac{S_n(\omega)}{n}$ sorozat konvergál. Ez viszont csak nulla valószínűségű $\omega \in \Omega$ halmazra érvényes. Megfogalmazom bizonyítás nélkül, hogy érvényes ennek az állításnak a megfordítása is, nevezetesen a következő tétel, amelyik szerepel a jegyzetben.

Tétel. *Legyen* ξ_1, ξ_2, ... , *független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és definiáljuk az* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, *részletösszegeket. Az* $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, *sorozat akkor és csak akkor konvergál pozitív valószínűséggel, ha* $E|\xi_1| < \infty$. *Ha* $E|\xi_1| < \infty$, *akkor ez a sorozat teljesíti a nagy számok erős törvényét, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = E\xi_1 \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega\textit{-ra.}$$

Az iterált logaritmus tétel.

Ez az eredmény felfogható úgy mint a nagy számok erős törvényének az élesítése. Ez pontosabban kifejezi azt, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók összegeinek a lim sup-ja mekkora. Ez akkor érvényes, ha a valószínűségi változóknak létezik második momentuma. Az iterát logaritmustétel a következőt mondja ki:

Iterált logaritmus tétel. *Legyenek* $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$, *független, egyforma eloszlású valószínűségi változók valamilyen* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn, melyekre* $E\xi_1(\omega) = 0$, $\operatorname{Var} \xi_1(\omega) = \sigma^2 < \infty$. *Ekkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} = 1, \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ elemi eseményre,}$$

és

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} = -1, \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ elemi eseményre,}$$

sőt igaz a következő némileg élesebb állítás is: A $\dfrac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}}$, $n = 1, 2, \dots$, *sorozat torlodási pontjainak halmaza a* $[-1, 1]$ *intervallum egy valószínűséggel.*

Nem nehéz belátni a Csebisev egyenlőtlenség vagy a centrális határeloszlástétel segítségével, hogy tetszőleges $\alpha(n) \to \infty$, ha $n \to \infty$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)|}{\sqrt{n}\alpha(n)} < \varepsilon \right) = 1 \quad \text{minden } \varepsilon > 0 \text{ számra,}$$

azaz a $\dfrac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{n}\alpha(n)}$ valószínűségi változók sztochaszikusan konvergálnak nullához.

A jegyzetben az állítás csak normális valószínűségi változók összegére van bizonyítva. Az bizonyos fokig standard, de meglehetősen fárasztó lépéseken alapul. Egyrészt a normális eloszlásfüggvény végtelenben való viselkedését kell leírni, (Lemma (6.2) ezután részben a Borel–Cantelli lemmát alkalmzzuk illetve a

$$P\left(\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} > x \right)$$

és

$$P\left(\sup_{1\le k\le n}\frac{\xi_1(\omega)+\cdots+\xi_k(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2\log\log n}}>x\right)$$

alakú eseményekre kell jó becslést adni. Ez utóbbi célból szerepel a bizonyításban a tükrözési elv (Lemma 6.3).