DOLGOZAT FELADATOK

Megjegyzés: Abban az esetben, ha egy megkérdezett fogalom definícióját több (egymással ekvivalens) módon lehet megadni, akkor ezek mindegyike jó válasznak minősül.

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után 10-szer egymástól függetlenül. Tekintsük a páros eredményű dobások összegének a harmadik hatványát, és számoljuk ki annak várható értékét.
2. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye a $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ függvény, és legyen t valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.
3. Egy urnában 20 fehér és 30 piros golyó van. Kihúzunk 10 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.
4. Péter és Pál a következő játékot játssza. Mind a ketten feldobnak egy szabályos dobókockát. Ha Pál dobott nagyobbat, akkor ő nyer három forintot Pétertől, ha Péter dobása nagyobb, akkor Pál fizet Péternek három forintot. Ha a dobások egyenlőek, akkor senki sem fizet a másiknak. Ezt a játékot játsszák 3000 alkalommal. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy Péter legalább 90 forintot nyer.
5. Legyen A_1, A_2 és A_3 három esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy az A_1, A_2 és A_3 események függetlenek?
6. Mikor konvergál $F_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények sorozata eloszlásban egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez?

MEGOLDÁSOK

1. Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3, vagy 5. Legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$.

   Ekkor minket az ES^3 mennyiség érdekel. $ES^3 = E\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j\right)^3$. Továbbá, $E\xi_j = 2$, $E\xi_j^2 = \dfrac{28}{3}$, $E\xi_j^3 = 48$ minden $1 \le j \le 10$ számra, és a ξ_j valószínűségi változók függetlenek. Ezért

$$ES^3 = \sum_{\substack{1\le j,k,l\le 10 \\ \text{a } j,k,l \text{ indexek különbözőek}}} E\xi_j E\xi_k E\xi_l + \sum_{\substack{1\le j,k\le 100 \\ \text{a } j,k \text{ indexek különbözőek}}} E\xi_j^2 E\xi_k + \sum_{j=1}^{10} E\xi_j^3$$
$$= 10\cdot 9\cdot 8\cdot 2^3 + 3\cdot 10\cdot 9\cdot \frac{28}{3} + 10\cdot 48 = 8760.$$

2. Ha ξ $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó $h(x)$ valós értékű (mérhető) függvény, akkor $Eh(\xi) = \int h(x)f(x)\,dx$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor
$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx.$$
Innen
$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t^2/2-(t-x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2}.$$

3. Legyen ξ_j, $1 \le j \le 10$, az a valószínűségi változó, amelyik 1, ha a j-ik húzás piros, 0 ha a j-ik húzás fehér. Ekkor mint azt a gyakorlaton megbeszéltük, $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{3}{5}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = \mathrm{Var}\,\xi_1 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$, $\mathrm{Cov}\,\xi_j, \xi_k) = \mathrm{Cov}\,(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1E\xi_2 = \frac{3}{5}\frac{29}{49} - \frac{9}{25} = -\frac{6}{1245}$, ha $j \ne k$, és a kihúzott piros golyók számána $S = \sum_{j=1}^{10} \xi_j$ várható értéke és szórásnégyzete
$$ES = \sum_{j=1}^{10} E\xi_j = 6,$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,S &= \sum_{j=1}^{10} \mathrm{Var}\,\xi_j + 2\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=j=1}^{10} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)\\ &= 10\mathrm{Var}\,\xi_1 + 90\mathrm{Cov}\,(\xi_1, \xi_2) = 10\frac{6}{25} - 90\frac{6}{1245} = \frac{96}{49}.\end{aligned}$$

4. Legyen ξ_j Péter nyereménye a j-ik játékban. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, Péter össznyereménye $S = \sum_{j=1}^{3000} \xi_j$, és $P(\xi_j = 3) = \frac{5}{12}$, $P(\xi_j = -3) = \frac{5}{12}$, $P(\xi_j = 0) = \frac{1}{6}$. (Annak valószínűségét írtuk fel, hogy Péter vagy Pált dob nagyobbat, illetve hogy a két dobás egyenlő. Innen $E\xi_j = 0$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = E\xi_j^2 = \frac{45}{6}$, $ES = 0$, $\mathrm{Var}\,S = 15 \cdot 1500 = 150^2$. Innen annak valószínűsége, hogy Péter legalább 90 forintot nyer
$$P(S \ge 90) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S}} \ge \frac{90}{150}\right) = 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S}} < 0.6\right) \sim 1 - \Phi(0.6) \sim 0.274$$

5. Az A_1, A_2 és A_3 események függetlenek, ha $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$ és $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

6. Az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F eloszlásfüggvényhez, ha az F eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ reláció.

   Szerepelt egy eredmény, amelyik szerint meg lehet adni egy ezzel ekvivalens megfogalmazást is. Azt is elfogaldtam, ha valaki ez utóbbi eredmény segítségével fogalmazta meg a definiciót. Eszerint az F_n eloszlásfüggvények akkor konvergálnak eloszlásban egy F eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen folytonos és korlátos $h(x)$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \int h(x)F_n(\,dx) = \int h(x)F(\,dx).$$