A három-dimenziós tér "masszív" halmazainak vizsgálata

A Markov láncokról szóló egyik klasszikus eredmény, a Pólya tétel szerint az Euklideszi tér két-dimenziós rácsán történő klasszikus bolyongás visszatérő, míg a három dimenziós rácson történő bolyongás nem visszatérő. Ez azt jelenti, hogy az origóból kiindulva a két dimenziós bolyongás egy valószínűséggel valamikor visszatér az origóba, míg a három-dimenziós bolyongás egynél kisebb valószínűséggel tér vissza. Be lehet látni, hogy a két illetve három-dimenziós bolyongásnak ez a tulajdonsága ekvivalens azzal, hogy a két dimenziós bolyongás egy valószínűséggel végtelen sokszor visszatér az origóba, míg a három-dimenziós bolyongás egy valósínűséggel csak véges sokszor tér vissza.

Azzal a kérdéssel foglalkozunk, E. B. Dynkin és A. A. Yushkevich *Teoremy i zadachi o processzach Markova* (Tételek és feladatok Markov folyamatokról) című könyvének első fejezete alapján, hogy melyek a három dimenziós rács azon viszonylag nagy, a szerzők által masszívnak nevezett részhalmazai, melyekbe a klasszikus bolyongás egy valószínűséggel eljut, akármelyik pontból is indul az ki. Mi is átvesszük ezt a szóhasználatot, tehát egy K halmazt masszívnak illetve nem masszívnak fogunk nevezni attól függően, hogy a bolyongás tetszőleges kiinduló pont esetén ezt a K halmazt egy valószínűséggel meglátogatja, vagy van olyan kiinduló pont ahonnan kiindulva a K halmaz meglátogatásának valószínűsége kisebb mint egy. Be lehet látni, és a bizonyítást meg is adjuk az említett könyv alapján, hogy egy tetszőleges pontból kiinduló bolyongás egy masszív halmazt végtelen sokszor meglátogat egy valószínűséggel, míg egy nem masszív halmazt bármely pontból is indulva ki egy valószínűséggel csak véges sokszor látogat meg. Jegyezzük meg, hogy ez az eredmény nem következménye a Markov láncok elméletében bebizonyított általános eredményeknek.

Mivel a bizonyítások részletesen és világosan meg vannak adva a könyvben, ezeket nem írom le ebben az ismertetésben. Amit érdemesnek tartok leírni, az ennek a kérdéskörnek kapcsolata a harmonikus függvények elméletével és a Laplace operátorral, pontosabban annak egy diszkrét változatával.

Tekintsünk egy előírt pontból induló bolyongást a három dimenziós rácson, azaz legyen $H = H^3$ a három dimenziós rács, az egész koordinátákból áló $k = (k_1, k_2, k_3)$ pontok halmaza, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ a rács egységvektorai az x pontból kiinduló bolyongás pedig X_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, valószínűségi változók olyan sorozata, melyre $P(X_0 = x) = 1$, és az $X_{k+1} - X_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, valószínűségi változók függetlenek, $P(X_{k+1} - X_k = \pm\mathbf{e}_j) = \frac{1}{6}$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$, és $j = 1$ vagy $j = 2$ vagy $j = 3$ számra. Az előbb definiált X_k, $k = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata tekinthető úgy is mint egy speciális (homogén) Markov lánc. Vezessük be a $p(x, y) = P(X_1 = y|X_0 = x)$ és $p_k(x, y) = P(X_k = y|X_0 = x)$, $x \in H$, $y \in H$, $k = 0, 1, \dots$, függvényeket. Speciálisan, legyen $p_0(x, y) = 0$, ha $x \neq y$, és $p_0(x, x) = 1$ az $k = 0$ esetben. Ezek a függvények a tekintett Markov lánc egy lépéses illetve k lépéses átmenet valószínűség függvényei. Az alább definiált fogalmak szintén tekinthetőek úgy, mint a Markov láncok elméletében használt definiciók bevezetései a most tekintett speciális esetben.

Tekintsük a H rácson értelmezett (valós értékű) függvények $\mathcal{H}$ terét, jelölje I az identitás operátort a $\mathcal{H}$ téren valamint definiáljuk a P

$$Pf(x) = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{3}\sum_{\varepsilon_l=\pm1} f(x+\varepsilon_l \mathbf{e}_j) = \sum_y p(x,y)f(y), \quad x \in H, \tag{1}$$

és $A = P - I$ operátorokat a $\mathcal{H}$ téren. Nevezzünk egy a H rácson értelmezett függvényt harmonikusnak, ha $Af(x) = 0$ minden $x \in H$-ra, és excesszivnek, ha $f(x) \geq Pf(x)$, azaz $Af(x) \leq 0$ és $f(x) \geq 0$ minden $x \in H$ rácspontra.

A fent definiált operátoroknak, valamint a harmonikus és excessziv függvényeknek fontos szerepük van a masszív halmazok vizsgálatában. Ezek a fogalmak a parciális differenciálegyenletek elméletében fontos szerepet játszó Laplace operátor valamint a harmonikus és excesszív függvények természetes analogonjai. Valóban, az előbb bevezetett A operátor a k-dimenziós Euklideszi térben definiált $\frac{1}{2}\Delta$ operátor diszkretizáltjának tekinthető, ahol $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. A parciális differenciálegyenletek elméletében egy f függvényt harmonikusnak neveznek, ha $\Delta f(x) \equiv 0$, és excesszívnek, ha $\Delta f(x) \leq 0$ és $f(x) \geq 0$ minden x argumentumra. A masszív halmazok vizsgálatában bizonyítandó és fontos szerepet játszó eredmények a parciális differenciálegyenletek elméletében bizonyított alapvető eredmények diszkrét megfelelői. Érdemes ezt a kapcsolatot részletesebben tárgyalni.

A k-dimenziós Euklideszi térben harmonikus és korlátos függvények konstansok. Sőt ennek az állításnak egy élesebb formája is igaz. Ha egy harmonikus függvény alulról korlátos, akkor konstans. Legyen adva egy $h(x)$ függvény a k-dimenziós térben, és tekintsük a $\frac{1}{2}\Delta f(x) = -h$ parciális differenciálegyenletet. E feladat megoldásában kulcsszerepet játszanak az alábbi $g_0(x,y)$ függvények.

$$\begin{aligned} g_0(x,y) &= \log|x-y|, \quad \text{ha a tér dimenziója } k=2 \\ g_0(x,y) &= \frac{1}{|x-y|^{k-2}}, \quad \text{ha a tér dimenziója } k \geq 3, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $|u| = \left(\sum\limits_{j=1}^{k} u_j^2\right)^{1/2}$ egy u vektor hosszát jelöli. Vegyük észre, hogy a (2) formulában definiált $g_0(x,y)$ függvény majdnem harmonikus a következő értelemben. Rögzítve az y koordinátát teljesül a $\Delta g_0(x,y) = 0$ azonosság az $x = y$ pontot kivéve minden pontban. (Az $x = y$ pontban viszont a $g_0(x,y)$ függvénynek szakadása van. Alkalmas fogalomrendszer kiépítésével azt lehet állítani, hogy a Δg_0 függvény értéke ebben a pontban az úgynevezett $\delta(x)$ Dirac féle delta függvény konstansszorosa.)

Ha adott egy $h(x)$ függvény, akkor a $\frac{1}{2}\Delta u(x) = -h(x)$ függvény megoldása

$$u(x) = G_0(h(x) = C_k \int g_0(x-y)h(y)\,dy \tag{3}$$

alakú, ahol a $C_k > 0$ konstans csak a tér k dimenziójától függ. Továbbá egy tetszőleges $f(\cdot)$ excessziv függvény előállítható

$$f(x) = G_0(h(x) + \text{const.} = C_k \int g_0(x-y)h(y)\,dy + \text{const.} \tag{4}$$

alakban, ahol $h(x) = -\frac{1}{2}\Delta f(x) \geq 0$. A (4) képletben ugyanis a $\frac{1}{2}\Delta u(x) = -h(x)$ egyenlet (egyik) megoldását írtam fel. Valójában a fenti eredményeket kissé pongyolán fogalmaztam meg. Egy pontos megfogalmazásban tisztázni kellett volna, hogy milyen függvénytérben kerestük a megoldást. Sőt, érdemes lett volna a Laplace operátor definicióját is részletesebben tárgyalni. Hasznos lett volna azt olyan függvényekre is kiterjeszteni, melyek nem feltétlenül differenciálhatóak. Ilyen vizsgálatok vezettek bizonyos általánosított függvények, az úgynevezett disztribuciók bevezetéséhez. Megjegyzem, hogy a Laplace egyenlet megoldása nem egyértelmű. Amennyiben egy $u(\cdot)$ függvény megoldása a $\frac{1}{2}\Delta u(x) = -f(x)$ egyenletnek, akkor az $u(x) + \text{const.}$ függvény tetszőleges konstanssal szintén megoldása ennek az egyenletnek. Az egyértelműséget gyakran egy új feltétel bevezetésével biztosítják. Nevezetesen megkövetelik, hogy a megoldás a végtelenben tartson nullához.

Tekintsük a fenti eredmények megfelelőit a probléma diszkrét változatára, amikor a k-dimenziós Euklideszi tér helyett a három dimenziós rácson értelmezett függvényeket tekintjük, és a Laplace operátort annak diszkrét megfelelőjével az $A = P - I$ operátorral helyettesítjük. Ekkor is igaz, hogy tetszőleges korlátos vagy általánosabban alulról korlátos harmonikus függvény konstans. Az $Au(x) = -f(x)$, $x \in H$, egyenletnek felírható a (3) formulához hasonló megoldása, de ebben a (2) formulában bevezetett $g_0(x,y)$ függvények szerepét az alábbi $g(x,y)$ függvények veszik át:

$$g(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_n(x,y), \quad x, y \in H, \tag{2'}$$

ahol $p_n(x,y) = P(X_n = y | X_0 = x)$, a Markov lánc n lépéses valószínűségi átmenet függvénye. Jegyezzük meg, hogy rögzített y-ra a $g(x,y)$ függveny teljesíti az $Ag(x,y) = 0$ egyenletet minden $x \in H \setminus \{y\}$ pontban. A $(2')$ formulában szereplő összeg konvergens. Ez azzal a ténnyel függ össze, hogy a három dimenziós bolyongás nem visszatérő. A $g(x,y)$ függvények segítségével az $Au(x) = -h(x)$ egyenlet megoldása

$$u(x) = Gh(x) = \sum_{y \in H} g(x,y)h(y) \tag{3'}$$

alakban írható fel. Egy $f(x)$ excesszív függvény

$$f(x) = Gh(x) + \text{const.} = \sum_{y \in H} g(x,y)h(y) + \text{const.}$$

alakban írható fel, ahol $h(x) = -Af(x) \geq 0$.

A (2) formulában definiált $g(x, y)$ egy további fontos tulajdonsága az, hogy rögzített $y \in H$ számra $g(x, y) \sim \text{const.} \dfrac{1}{|x-y|}$, ha $x \to \infty$, azaz $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x-y|g(x, y) = \text{const.} > 0$. Ez azt jelenti, hogy a (2) formulában definiált $g_0(x, y)$ a $k = 3$ három dimenziós esetben hasonlóan viselkedik a végtelenben a $g(x, y)$ függvényhez. Ennek a hasonlóságnak mélyebb oka van, amit érdemes megérteni.

A Laplace operátor vizsgálatában érdemes azt tekinteni, hogyan hat a Laplace operátor egy függvény Fourier transzformáltjára. Adva egy $f(x)$ függvény a k-dimenziós Euklideszi térben, tekintsük annak Fourier transzformáltját, az $\tilde{f}(t) = \int e^{i(t,x)} f(x)\, dx$ függvényt, ahol $(t, x) = \sum\limits_{j=1}^{k} t_j x_j$ a $t = (t_1, \dots, t_k)$ és $x = (x_1, \dots, x_k)$ vektor skalárszorzatát jelöli. Be lehet látni, hogy ekkor $\widetilde{\Delta f}(t) = -\left(\sum\limits_{j=1}^{k} t_j^2\right) \tilde{f}(t)$. Ennek alapján a $\Delta u(x) = h(x)$ egyenlet a Fourier transzformáltak terében $|t|^2 \tilde{u}(t) = -\tilde{h}(t)$, $|t|^2 = \left(\sum\limits_{j=1}^{k} t_j^2\right)$, alakban írható fel. A (2) és (3) formula tulajdonképpen ennek az egyenletnek a megoldásából kapható meg az inverz Fourier transzformált segítségével (a Parseval formula felhasználásával). A (2) formulában definiált $g_0(x, y)$ függvény ennek az érvelésnek a segítségével úgy jelenik meg mint a $|t|^{-2}$ függvény Fourier transzformáltjának az eltoltja.

Valójában a fenti érvelés kissé pongyola volt. Kissé szabadon bántam a Fourier transzformált fogalmával, nem vettem figyelembe, hogy klasszikus értelemben vett Fourier transzformáltja csak az integrálható függvényeknek van. (Némi plusz munkával a négyzetesen integrálható függvények Fourier transzformáltjai is definiálhatóak.) Viszont kidolgozva a disztribuciók elméletét a fenti érvelés precizen elmondható. Ha a Laplace operátor diszkrét változatát tekintjük a H téren értelmezett függvények terében, akkor a fenti érvelés analogonja elmondható, és az említett technikai nehézségek nem lépnek fel. Ebben az esetben a Fourier transzformáltakkal való számolás függvńyek Fourier sorának vizsgálatát jelenti.

Tekintsük a $(2')$ formulában definiált $g(x, y)$ függvényt a $H \times H$ rácson. Ez $g(x, y) = \bar{g}(x-y)$ alakban írható. Definiáljuk a

$$\tilde{g}(t_1, t_2, t_3) = \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in H} e^{i(k_1t_1+k_2t_2+k_3t_3)} \bar{g}(k_1, k_2, k_3)$$

Fourier sort, és fejezzük ki azt zárt alakban. Ennek érdekében definiáljuk először a $\bar{p}(u) = p(x, x+u)$ és $\bar{p}_n(u) = p_n(x, x+u)$, $n = 1, 2, \dots$, $u \in H$, függvényeket és a

$$\tilde{p}(t_1, t_2, t_3) = \sum e^{i(k_1t_1+k_2t_2+k_3t_3)} \bar{p}(k_1, k_2, k_3)$$
$$\tilde{p}_n(t_1, t_2, t_3) = \sum e^{i(k_1t_1+k_2t_2+k_3t_3)} \bar{p}_n(k_1, k_2, k_3)$$

Fourier sorokat, és írjuk azokat jobban használható formában. Mivel $\tilde{p}(t_1, t_2, t_3)$ egy X_1, $\tilde{p}_n(t_1, t_2, t_3)$ egy $X_1 + \dots + X_n$ véletlen összeg karakterisztikus függvénye, ahol

$X_1, \ldots, X_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $P(X_1 = \pm \mathbf{e}_j) = \frac{1}{6}$, $j = 1, 2, 3$, ezért

$$\tilde{p}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{3} \left(e^{it_j} + e^{-it_j}\right), \qquad \tilde{p}_n(t_1, t_2, t_3) = \tilde{p}(t_1, t_2, t_3)^n, \tag{5}$$

ahonnan

$$\tilde{g}(t_1, t_2, t_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}^n(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{1 - \tilde{p}^n(t_1, t_2, t_3)}. \tag{5a}$$

Egy függvény Fourier sorának Fourier együtthatóit megadó formula alapján

$$\begin{aligned} g(x, y) = \bar{g}(x - y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi,\pi)^3} e^{-i((x_1-y_1)t_1+(x_2-y_2)t_2+(x_3-y_3)t_3)} \tilde{g}(t_1, t_2, t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi,\pi)^3} \frac{e^{-i((x_1-y_1)t_1+(x_2-y_2)t_2+(x_3-y_3)t_3)}}{1 - \tilde{p}(t_1, t_2, t_3)}\, dt_1\, dt_2\, dt_3 \end{aligned}$$

A fentiek alapján a $g(x, y) = \bar{g}(x - y)$ felírható mint a (5) és (5a) képletek segítségével definiálható $\tilde{g}(t_1, t_2, t_3) = \dfrac{1}{1 - \tilde{p}(t_1, t_2, t_3)}$ függvény (inverz) Fourier transzformáltja. Ennek viselkedésére vagyunk kiváncsiak a végtelenben. Viszont ismeretes a Fourier transzformáltak elméletéből, hogy egy függvény Fourier transzformáltjának a viselkedését a végtelenben a függvény szingularitásai határozzák meg. A $\tilde{g}(t_1, t_2, t_3)$ függvény egyetlen szingularitása az origóban van. Mint azt Taylor-sor fejtés mutatja, $\tilde{g}(t) \sim |t|^{-2}$., ha $t \to 0$. Ennek a ténynek a segítségével be lehet látni, hogy $g(x, y) = \bar{g}(x - y) \sim |y - x|^{-1}$. Érdemesnek tartom megjegyezni, hogy a $g(x, y)$ és $g_0(x, y)$ függvények hasonló viselkedésének hátterében az a tény áll, hogy e függvények Fourier transzformáltjai hasonlóan viselkednek az origóban, ahol szingularitásuk van.

A Laplace operátornak fontos szerepe van a fizikában az elektromosságtanban is. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tekintsük csak a $k = 3$ dimenziós teret. Ha elhelyezünk elektromos töltéseket a térben, akkor azok létrhoznak egy erőteret. Ha a töltéselhelyezés sűrűsége $h(x)$, azaz egy B tartományba eső töltés $\int_B h(u)\, du$, akkor egy x pontbeli potenciál $u(x)$ értéke a $\frac{1}{2}\Delta u(x) = -h(x)$ vagy az ezzel ekvivalens $u(x) = G_0 h(x)$ egyenlet megoldása. Ez azt jelenti, hogy az x pontból az y pontba való elmozduláshoz a töltések által létrehozott erőtérben $u(y) - u(x)$ munka szükséges. Azt a normálást alkalmazzuk, mely szerint a potenciál értéke a végtelenben nulla. Az eletromosságtan fontos kérdése az, hogy amennyiben töltések kerülnek egy vezetőre, amelyik a tér bizonyos B tartományát tölti ki, akkor hogyan fognak ezek a töltések eloszlani az egyensúlyi állapotban, és milyen erőteret hoznak létre. Ennek a kérdésnek a vizsgálata vezetett az elektromosságtanban a kapacitás fogalmának bevezetéséhez.

Mint a fizika sok problémájában a fenti kérdésre adott válasz megfogalmazható egy maximumelv segítségével. Be lehet látni a következő tényt. Ha úgy akarunk elhelyezni bizonyos mennyiségű töltést egy B tartományban, hogy az így megvalósított erőtérben a potenciál értéke minden pontban legyen kisebb mint 1, akkor létezik egy olyan tölteseloszlás, mely szerint a potenciál minden pontban maximális ezen mellékfeltétel mellett. A B tartományban ily módon elhelyezhető töltést hívják a B tartomány kapacitásának. Ha bizonyos mennyiségű töltést elhelyezünk egy B alakú tartományt kitöltő vezetőre, akkor az egyensúly állapot, amelyik megvalósul megegyezik ennek a tömegeloszlás konstansszorosával. Ismeretes továbbá az is, hogy a töltések az egyensúlyi állapot eloszlása olyan, hogy a töltések a tartomány szélére kerülnek, és a térerősség a tartomány belsejében nulla. Ez egyben azt is jelenti, hogy a potenciál értéke a tartomány belsejében konstans, és a potenciál a tartomány belsejében a legnagyobb. Ennek az egyensúlyi állapotnak van egy másik szélsőérték tulajdonsága is. Be lehet látni, hogy ha úgy akarunk elhelyezni töltéseket elhelyezni egy B alakú vezetőben, hogy a potenciál semmelyik pontban sem legyen nagyobb mint 1, akkor nem tudunk több töltést elhelyezni, mint a B halmaz kapacitása. Ez azt jelenti, hogy ha a potenciálnak az egész térben felvett értékeit tekintjük, és ennek maximumát akarjuk minimalizálni úgy, hogy előírt mennyiségű töltést helyezünk el egy B tartományon és az általuk létrehozott erőteret vizsgáljuk, akkor az egyensúlyi állapot adja meg az optimális elhelyezést.

Az előző bekezdésben megfogalmazott tényekre nem lesz közvetlenül szükségünk. Az inkább csak arra szolgál, hogy megértsük, milyen eredményeket várhatunk, ha az előző fogalmak diszkrét megfelelőjét tekintjük, amikor a Laplace operátort a három dimenziós rácson definiált $A = P - I$ operátorral helyettesítjük. Az előbb megfogalmazott, az elektromosságtanben megjelenő eredményeknek természetes megfelelői érvényben maradnak az említett diszkrét modellben, sőt a bizonyítások könnyebben érthetőek. Ezenkívül a kapacitás fogalmának érdekes valószínűségszámítási tartalma van, és az segít annak a kérdésnek a vizsgálatában, hogy melyek a három dimenziós tér rácsának masszív részhalmazai.

Adva a három-dimenziós tér egész koordinátájú H rácsának egy $B \subset H$ részhalmaza vezessük be a

$$\pi_B(x) = P(\text{az } x \text{ pontból kiinduló bolyongás eléri a } B \text{ halmazt}), \quad x \in H \tag{6}$$

függvényt. A (6) formulában definiált $\pi_B(\cdot)$ függvény excessziv. Ha a B halmaz masszív. akkor $\pi_B(x) = 1$ minden $x \in H$ pontban, ha pedig a B halmaz nem masszív, akkor az excessziv függvények általános tulajdonságainak felhasználásával belátható, hogy $\pi_B(x) = G\varphi_B(x)$ alakban írható, ahol

$$\varphi_B(x) = -A\pi_B(x) = \pi_B(x) - P\pi_B(x) \geq 0 \quad \text{minden } x \in H \text{ pontban,} \tag{7}$$

és a P operátort az (1) a G operátort pedig a (3′) formulában definiáltuk.

Tekintsük egy B tartományban elhelyezett töltések egyensúlyi állapotát. A fent definiált $\pi_B(x)$ szoros kapcsolatban van az ezen egyensúlyi állapot által meghatározott erőtér potenciáljával, $\varphi_B(x)$ pedig az egyensúlyi állapot eloszlásával. Leírjuk az ezen tényt leíró eredményeket. Ezek részletes bizonyítása megtalálható a Dynkin–Yushkevich könyvben, és az fontos szerepet játszik a masszív halmazok leírásában.

Jelölje $\mathcal{K}_B$ azon a H rácson értelmezett $\varphi(x)$, $x \in H$, függvények osztályát, melyekre, $\varphi(x) \geq 0$ minden $x \in H$ és $\varphi(x) = 0$ minden $x \in H \setminus B$ pontban, továbbá, $G\varphi(x) \leq 1$,

$x \in H$. Legyen B egy nem masszív halmaz. Ekkor a (7) formulában definiált $\varphi_B(\cdot)$ függvény teljesíti a $\varphi_B \in \mathcal{K}_B$ tulajdonságot. Ezen állítás bizonyításának legnehezebb része a $G\varphi_B(x) = \pi_B(x) \le 1$ azonosság igazolása. A $\varphi_B(x)$ függvény teljesíti továbbá a $G\varphi(x) \le G\varphi_B(x)$ egyenlőtlenséget minden $\varphi \in \mathcal{K}_B$ függvényre és $x \in H$ pontra. Ez azt jelenti, hogy a $\varphi_B(x)$ függvény teljesít egy olyan tulajdonságot, mely természetes megfelelője az elektromosságtanban a B halmazon kialakuló egyensúlyi állapotnak.

Az előbb említett eredmények alapján érdemes bevezetni a következő fogalmakat: Adva egy nem masszív B halmaz tekintsük a (7) formulában definiált $\varphi_B(x)$ függvényt. Nevezzük ezt a $\varphi_B(x)$, $x \in H$ halmazt egyensályi állapotnak és legyen

$$C(B) = \sum_{x \in B} \varphi_B(x)$$

a B halmaz kapacitása. Teljesül a kapacitásnak a folytonos esetben említett tulajdonságainak a következő megfelelője is:

$$\sum_{x \in B} \varphi(x) \le \sum_{x \in B} \varphi_B(x) \quad \text{minden } \varphi \in \mathcal{K}_B \text{ függvényre.}$$

A (6) formulában definiált $\pi_B(x) = G\varphi_B(x)$ függvény felel meg a folytonos esetben az egyensúlyi állapot által definiált erőtér potenciál függvényének. Ennek a függvénynek szemléletes valószínűségi tartalma van. és ez teszi lehetővé a masszív és nem masszív halmazok jellemzését. Jegyezzük meg, hogy a H minden véges halmaza nem masszív. A Dynkin–Yushkevich könyv alapján ismertetni fogom a következő Wiener–tételnek hívott eredményt.

Wiener tétele a masszív halmazok jellemzéséről. *Legyen B a három dimenziós tér H rácsának egy részhalmaza, és definiáljuk a B halmaz*

$$B_k = \{x \colon x \in B,\ 2^{k-1} \le |x| < 2^k\} \quad k = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

részhalmazait. A B halmaz akkor és csak akkor nem masszív, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C(B_k)}{2^k} < \infty, \tag{9}$$

ahol $C(B_k)$ a B_k halmaz kapacitása.

Ebben az ismertetésben csak röviden ismertetem a bizonyítás néhány gondolatát. A bizonyítás alapgondolata az, hogy jó felső és alsó becslést kell adnunk annak $\pi_{B_k}(0)$ valószínűségére, hogy egy az origóból kiinduló bolyongás meglátogatja a B_k halmazt. A becslés során felhasználjuk, hogy $\pi_{B_k}(0) = G\varphi_{B_k}(0)$, és a G operátort definiáló összeg $g(x, y)$ magfüggvénye teljesíti a $g(0, y) \sim \text{const.}\,|y|^{-1}$ relációt. Ennek a gondolatnak a kifejtése és néhány egyszerű észrevétel adja azt, hogy amennyiben a (9) formulában szereplő összeg konvergens, akkor a B halmaz nem masszív. A tétel másik felének bizonyítása kissé bonyolultabb érvelést igényel. Ennek az állításnak a bizonyítása során egy következő jellegű becslést bizonyítanak. Tudjuk, hogy az origóból kiinduló bolyongás egy valószínűséggel akármilyen messze ellátogat. Tekintsünk egy $y_1 < 2^{k-1} < 2^k \ll y_2$ számokat. Legyen τ_1 az első (véletlen) időpont, amikor a bolyongás y_1 távolságra távolodik az origótól, τ_2 az első (véletlen) időpont, amikor a bolyongás y_2 távolságra jut az origótól. Be lehet látni, hogy az y_1 és y_2 számok alkalmas rögzítése esetén annak valószínűsége, hogy a bolyongás a $[\tau_1, \tau_2]$ időintervallumban meglátogatja a B_k halmazt ugyanolyan nagyságrendű mint annak valószínűsége, hogy a bolyongás meglátogatja valamikor a B_k halmazt. Sőt, az is igaz, hogy annak feltételes valószínűsége, hogy a bolyongás a $[\tau_1, \tau_2]$ időintervallumban meglátogatja a B_k halmazt feltéve a τ_1 időpontot és a bolyongás $X(\tau_1)$ értékét a τ_1 időpontban nagyobb mint egy univerzális konstans szorozva annak valószínűségével, hogy a bolyongás valamikor meglátogatja a B_k halmazt. Ez igaz a feltétel bármely lehetséges értéke esetén.

Megpróbálhatjuk a fent kimondott tétel segítségével vizsgálni, hogy a három dimenziós rács egy konkrét B részhalmaza masszív-e. Ennek eldöntése bizonyos esetekben nem egyszerű, mert egy konkrét B halmaz esetében nem könnyű kiszámolni a (8) formulában definiált B_k halmaz $C(B_k)$ kapacitását. Viszont annak eldöntése érdekében, hogy a (9) formulában szereplő összeg konvergens-e vagy divergens, elegendő jó felső és alsó becslést adni a $C(B_k)$ kapacitásra. Egy egyszerű, de sokszor hasznos felső becslés a $C(B_k) \le |B_k|$ azonosság, ami közvetlenül adódik a $\varphi_{B_k}(x) \le 1$ egyenlőtlenségből. Alsó becslést kaphatunk az alábbi egyenlőtlenség segítségével: $C(B) \ge \sum\limits_{x \in B} \varphi(x)$ minden $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_B$ függvényre. Annak bizonyításához, hogy $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_B$ egy konkrét $\varphi(\cdot)$ függvény esetén meg kell mutatni azt, hogy $G\varphi(x) \le 1$ minden $x \in H$ pontban. Ennek a tulajdonságnak az ellenőrzéséhez érdemes alkalmazni a $(3')$ formulát és a $g(x,y) \sim |x-y|^{-1}$, ha $|x-y| \to \infty$ relációt. Ezen észrevételek segítségével bizonyítják be a Dynkin–Yushkevich könyvben az alábbi eredményt, melyet szintén tárgyalni fogok.

Tétel. *Tekintsük a H rács egy $B = \{(b_k, 0, 0),\ k = 1, 2, \dots\}$ alakú halmazát, ahol $1 \le b_1 < b_2 < \cdots$, pozitív egész számok szigorúan monoton sorozata. Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_k} < \infty$, akkor a B halmaz nem masszív. Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_k} = \infty$, és $b_{k+1} - b_k \le c \log b_k$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra alkalmas $c > 0$ számmal, akkor a B halmaz masszív.*

Meg fogom tárgyalni ennek az eredménynek a hátterét is.

A fent megfogalmazott eredményekkel és az eredmények hátterében megjelenő elmélettel fogok foglalkozni. Végül még egy megjegyzést teszek arról, hogy miért van a közönséges bolyongás vizsgálata szoros kapcsolatban a Laplace operátorral és a harmonikus függvények elméletével. Tekintsük az origóból kiintuló $X_1, X_2, \dots,$ bolyongást, és definiáljuk minden $n = 1, 2, \dots$ számra ennek a bolyongásnak a következő természetes átskálázása segítségégével definiálható $W_n(t)$, $t \ge 0$ sztochasztikus folyamatot:

$$W_n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} X_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

és legyen a $W_n(\cdot)$ függvény lineáris a $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ intervallumban. Be lehet látni, hogy $n \to \infty$ esetben ezek a sztochasztikus folyamatok konvergálnak a három-dimenziós Wiener folyamathoz. A közönséges bolyongás esetében definiált $A = P - I$ operátornak a természetes megfelelője a Wiener folyamat esetében a Wiener folyamat infinitezimális operátora, és ez az $\frac{1}{2}\Delta$ operátor.

A bolyongásra megfogalmazott problémákat és a problémák megoldásában szerepet játszó módszereket természetes módon meg lehet fogalmazni Wiener folyamatok esetében is. E módosított problémában az $A = P - I$ operátor helyett a Wiener folyamat $\frac{1}{2}\Delta$ infinitezimális operátorát kell tekintenünk. Ezért a vizsgálatban a Laplace operátor viselkedését kell megértenünk. Az eredeti, a bolyongás viselkedését tárgyaló problémában megjelenő eredmények hasonlóak mint a Wiener folyamat viselkedését leíró eredmények. E hasonlóság oka az, hogy az $A = P - I$ operátor, ami a Wiener folyamat infinitezimális operárotának természetes diszkrét közelítéseként is tekinthető, hasonlóan viselkedik az $\frac{1}{2}\Delta$ operátorhoz.