A november 13-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Teszek néhány kiegészítő magyarázatot a múlt gyakorlaton végzett számításokhoz. Ott használtam a $O(\cdot)$ (ejtsd nagy ordó) illtve $o(\cdot)$ (ejtsd kis ordó) jelölést. A gyarkorlaton derült ki, hogy ezzel a jelölésrendszerrel a hallgatóság korábban nem találkozott. Mivel ez hasznos és természetes jelölésrendszer, ezért érdemes ismertetni.

E jelölésrendszer segítségével azt akarjuk megfogalmazni, hogy egy bonyolult kifejezést milyen pontossággal tudunk közelíteni egy egyszerűbb kifejezéssel. A klasszikus példa a Taylor sorfejtés, és a vizsgált számolások többségében ezt használtuk. Ha egy függvény elég sokszor differenciálható, akkor az e függvény Taylor sorának első néhány tagjából álló polinom jól közelíti ezt a függvényt annak a pontnak a közelében, ahol a sorfejtést végeztük. De ez a közelítés csak ennek a pontnak kis környezetében ad hasznos eredményt. A $O(\cdot)$ és $o(\cdot)$ jelölést annak érdekében vezették be, hogy egyszerű és természetes módon mérjék az ilyen közelítések jóságát.

E bevezetés után adjuk meg e fogalmak pontos definicióját: Legyen egy $f(t)$ függvénynek egy $g(t)$ függvény jó közelítése egy t_0 pont kis környezetében. Legyen $R(t)$, $R(t) \ge 0$, valamely függvény. Azt mondjuk, hogy $f(t) = g(t) + o(R(t))$ $t = t_0 + o(1)$ esetben, ha $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{|f(t)-g(t)|}{R(t)} = 0$ Azt mondjuk, hogy $f(t) = g(t)+O(R(t))$ $t = t_0+O(1)$ esetben, ha léteznek olyan $K > 0$ és $L > 0$ számok, melyekre $\left|\dfrac{|f(t)-g(t)|}{R(t)}\right| \le K$, ha $|t-t_0| \le L$. Egy (fontos) példa. Legyen $f(t)$ háromszor differenciálható függvény. Ekkor $f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2} + O(t^3)$, ha $t = O(1)$, mert a közelítés nagyságrendje annyi, mint a Taylor sorfejtés harmadik tagja. Ha viszont csak annyit tudunk, hogy az f függvény kétszer differenciálható (ez a helyzet például akkor, ha olyan valószínűségi karakterisztikus függvényét tekintjük, melynek második momentuma véges, de a harmadik momentuma lehet végtelen is), akkor csak a következő gyengébb állítást írhatjuk fel: $f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$, ha $t = o(1)$.

1. Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x \le 0$. Számítsuk ki a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét.

   Megodás: Jelölje $G(x)$ a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor $G(x) = P(\xi + \xi^2 < x)$. Mivel a ξ (exponenciális eloszlású valószínűségi) változó csak nem negatív értékeket vesz fel, ezért $\xi+\xi^2$ valószínűségi változó is egy valószínűséggel nem negatív értéket vesz fel, azaz $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Ha $x \ge 0$, akkor a $\xi + \xi^2 < x$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a ξ valószínűségi változó olyan y értéket vesz fel, melyre $y + y^2 < x$, azaz $y_1(x) < \xi < y_2(x)$, ahol $y_2(x) = \dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$, és $y_1(x) = \dfrac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$, azaz $y_2(x)$ és $y_1(x)$ az $y^2 + y - x = 0$ egyenlet nagyobb illetve kisebb gyöke. Mivel $y_1(x) \le 0$, $y_2(x) \ge 0$ minden $x \ge 0$ számra, ezért $G(x) = P\left(y_1(x) < \xi < y_2(x)\right) = P\left(\xi < y_2(x)\right) = 1 - e^{-y_2(x)} = 1 -$

$\exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$. Ezzel meghatároztuk a $\xi+\xi^2$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. A $\xi+\xi^2$ valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye ennek deriváltja, azaz $g(x)=0$, ha $x<0$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}\exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$.

Megjegyzés: Ebben a feladatban a $\xi \to \xi+\xi^2$ leképezés inverzét kellett kiszámítani, azaz azt, hogy ha $\xi+\xi^2$ egy félegyenesbe esik, akkor hova esik ξ. A feladatban szereplő ξ és ξ^2 valószínűségi változók *nem függetlenek.* Ezért a független valószínűségi változólra tanultak (pl. a konvoulució alkalmazhatósága) nem használható a $\xi+\xi^2$ kiszámításánál. A $\xi+\xi^2$ összeg tagjait együtt kell tekinteni, az összeg eloszlását nem lehet kiszámítani ha csak a ξ és ξ^2 valószínűségi változók eloszlásait ismerjük, de együttes eloszlásukat nem.

2. Adva van 100 lámpa, amelyek élettartama exponenciális eloszlású, $\lambda=\frac{1}{10}$ paraméterrel. Ezeket a lámpákat egymás után betesszük egy foglalatba, hogy bevilágítsanak egy termet, és kicseréljük őket akkor, amikor kiégnek vagy 11 órai használat után akkor is, ha még nem égtek ki. Arra vagyunk kiváncsiak, mennyi ideig világítják be a lámpák a termet. Számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Jelölje ξ_j, $j=1,2,\dots$, azt, hogy mennyi ideig világítja be a termet a j-ik kámpa. Számoljuk ki ξ_j $E\xi_j$ várható értékét és $\operatorname{Var}\xi_j$ szórásnégyzetét.

$$\begin{aligned}
E\xi_j &= \int_0^{11} \frac{x}{10}e^{-x/10}\,dx + 11P(\xi_j=11) = \left[-xe^{-x/10}\right]_0^{11} + \int_0^{11} e^{-x/10}\,dx \\
&\quad + \int_{11}^{\infty} \frac{11}{10}e^{-x/10}\,dx = -11e^{-11/10} + 10\left(1-e^{-11/10}\right) + 11e^{-11/10} \\
&= 10(1-e^{-11/10}),
\end{aligned}$$

   és

$$\begin{aligned}
E\xi_j^2 &= \int_0^{11} \frac{x^2}{10}e^{-x/10}\,dx + 121P(\xi_j=11) = \left[-x^2e^{-x/10}\right]_0^{11} + \int_0^{11} 2xe^{-x/10}\,dx \\
&\quad + 121e^{-11/10} = \int_0^{11} 2xe^{-x/10}\,dx = + \int_0^{11} 200e^{-x/10}\,dx \\
&= 200\left(1-e^{-11/10}\right) - 22e^{-11/10}.
\end{aligned}$$

   Ezért $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2-(E\xi_j)^2 = 100\left(1-e^{-11/10}\right)-20e^{-11/10}$. Minket az $S=\sum\limits_{j=1}^{100}\xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. $ES=100E\xi_1=1000(1-e^{-11/10})$, és $\operatorname{Var}S = 100\operatorname{Var}\xi_1 = 20000\left(1-e^{-11/10}\right)-2200e^{-11/10}$.

3. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó momentumait, azaz az $E\xi^k$ számokat, minden $k=1,2,\dots$, számra. Legyen η normális

eloszlású valószínűségi változó m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Számoljuk ki az η valószínűségi változó $E\eta^k$ momentumait is minden $k = 1, 2, \dots$ számra.

Megoldás: $E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$. Ha k páratlan szám, azaz $k = 2l+1$ alakú, ahol l egész szám, akkor az integrandus páratlan függvény akkor $E\xi^{2l-1} =$. Ha k páros szám, azaz $k = 2l$, ahol l egész szám, akkor parciális integrálással kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
E\xi^{2l} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx &= \left[x^{2l-1} \cdot (-1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} (2l-1) x^{2l-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = (2l-1) E\xi^{2l-2}.
\end{aligned}
$$

Ezt az azonosságot felhasználva indukcióval kapjuk, hogy

$$E\xi^{2l} = (2l-1)(2l-3)\cdots 3 \cdot 1.$$

Ha η normális eloszlású valószínűségi változó m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel akkor az $\eta = m + \sigma\xi$ alakban írható fel, ahol ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ezért $E\eta^k = E(m+\sigma\xi)^k = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} m^{k-j} \sigma^j E\xi^j$, ahonnan az $E\xi^j$ kifejezésre előbb bizonyított eredmény alapján

$$E\eta^k = \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \binom{k}{2j} m^{k-2j} \sigma^{2j} (2j-1)(2j-3)\cdots 3 \cdot 1,$$

ahol $[x]$ az x szám egész részét, azaz a legnagyobb x-nél kisebb egész számot jelöli.

4. Egy szabályos dobókockát feldobunk százszor egymás után. Számoljuk ki a páros dobások összegének a harmadik momentumát.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3, vagy 5. Legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$. Ekkor minket az ES^3 mennyiség érdekel. $ES^3 = E\left(\sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j\right)^3$. Továbbá, $E\xi_j = 2$, $E\xi_j^2 = 7$, $E\xi_j^3 = 48$ minden $1 \le j \le 100$ számra, és a ξ_j valószínűségi változók függetlenek. Ezért

$$
\begin{aligned}
ES^3 &= \sum_{\substack{1 \le j,k,l \le 100 \\ \text{a } j,k,l \text{ indexek különbözőek}}} E\xi_j E\xi_k E\xi_l + \sum_{\substack{1 \le j,k \le 100 \\ \text{a } j,k \text{ indexek különbözőek}}} E\xi_j^2 E\xi_k + \sum_{j=1}^{100} E\xi_j^3 \\
&= 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 2^3 + 3 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 14 + 100 \cdot 48 = 8176200.
\end{aligned}
$$

Idézzük fel a következő definiciót:

Rendezett minta definiciója. *Legyenek* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *független egyforma eloszlású valószínűségi változók valamilyen* $G(\cdot)$ *eloszlásföggvénnyel. Rendezzük ezeket a (véletlen) számokat* $\xi_1^* \le \xi_2^* \le \cdots \le \xi_n^*$ *monoton növekvő sorrendbe. Ekkor a* $\xi_1^* \le \xi_2^* \le \cdots \le \xi_n^*$ *sorozatot* n *elemű* $G(x)$ *eloszlsú rendezett mintának nevezzük.*

5. Legyen $\xi_1^* \le \xi_2^* \le \cdots \le \xi_n^*$ n elemű rendezett mint olyan $G(\cdot)$ eloszlásfüggvénnyel, melynek létezik $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye. Ekkor e rendezett mintának létezik (n-dimenziós) $h(x_1, \dots, x_n)$ sűrűségfüggvénye, és $h(x_1, \dots, x_n) = n! \prod\limits_{k=1}^{n} g(x_k)$, ha $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, és $h(x_1, \dots, x_n) = 0$, ha ez a feltétel nem teljesül.

   Megoldás: Legyen B az $A = \{(x_1, \dots, x_n)\colon -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \infty\}$ halmaz tetszőleges, (mérhető) részhalmaza az n-dimenziós térben. Ekkor
$$P((\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \in B) = n! P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in B),$$
   mert $P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in B) = P((\xi_{\pi(1)}, \dots, \xi_{\pi(n)}) \in B)$ az $\{1, \dots, n\}$ számok tetszőleges π permutációjára, és különböző permutációkra diszjunkt eseményeket tekintettünk. Innen,
$$P((\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \in B) = \int_B n! g(x_1) \cdots g(x_n)\, dx_1 \dots, dx_n,$$
   ha $B \subset A$, és $P((\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \in B) = 0$, ha $B \cap A = \emptyset$. Innen következik a feladat állítása.

6. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, $1 \le k \le n$. Az $\left(\frac{S_1}{S_n}, \dots, \frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ vektor független az S_n valószínűségi változótól, és e vektor elemei a $[0,1]$ intervallumban független, egyenletes eloszlású valószínűségi változókból álló rendezett mintát alkotnak.

   Megoldás: Számoljuk ki az $(S_1, \dots, S_n)$ vektor sűrűségfüggvényét.
$$P(S_1 < u_1, \dots, S_n < u_n) = P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in B) = \int_B \lambda^n e^{-\lambda(y_1 + \cdots + y_n)}\, dy_1 \dots dy_n,$$
   ahol $B = B(u_1, \dots, u_n) = \{(y_1, \dots, y_n)\colon y_j \ge 0, y_1 + y_2 + \cdots + y_j < u_j,\ j = 1, \dots, n\}$.

   Írjuk át a fenti integrált az $x_j = y_1 + \cdots + y_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ transzformációval. E transzformáció invertálható. Jacobiánja 1, a B halmazt az $\{0 \le x_j < u_j,\ j = 1, \dots, n\}$ halmazba képezi, ezért
$$P(S_1 < u_1, \dots, S_n < u_n) = \int_{\{0 \le x_1 \le x_2 < \cdots \le x_n,\ x_j < u_j,\ j=1,\dots,n\}} \lambda^n e^{-\lambda x_n}\, dx_1 \dots dx_n,$$

ahonnan az $(S_1,\dots,S_n)$ vektor sűrűségfüggvénye $f(x_1,\dots,x_n)=\lambda^n e^{-\lambda x_n}$, ha $0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n$, és $f(x_1,\dots,x_n)=0$ egyébként.

$$\begin{aligned}
P&\left(\frac{S_1}{S_n}<u_1,\dots,\frac{S_{n-1}}{S_n}<u_{n-1},S_n<x\right)\\
&=P(S_1<S_nu_1,\dots,S_{n-1}<S_nu_{n-1},S_n<x)\\
&=\int_{\{0\le y_j<u_jy_n,\,j=1,\dots,n,\,0\le y_n<x\}} f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n\\
&=\int_{\{0\le y_j<u_jy_n,\,j=1,\dots,n,\,0\le y_1\le y_2\le y_n<x\}} \lambda^n e^{-\lambda y_n}\,dy_1\dots dy_n.
\end{aligned}$$

Végezzük el az $x_j=y_jy_n$, $j=1,2,\dots,n-1$ és $x_n=y_n$ helyettesítésket. E transzformáció Jacobiánja x_n^{n-1}, és

$$\begin{aligned}
P&\left(\frac{S_1}{S_n}<u_1,\dots,\frac{S_{n-1}}{S_n}<u_{n-1},S_n<x\right)\\
&=\int_{\{0\le x_j<u_j,\,j=1,\dots,n,\,0\le x_n<x\}} x_n^{n-1}f\left(\frac{x_1}{x_n},\dots,\frac{x_{n_1}}{x_n},x_n\right)dx_1\dots dx_n.
\end{aligned}$$

Innen a keresett sűrűségfüggvény $f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=\lambda^n e^{-\lambda x_n}x_n^{n-1}$, ha $0\le x_1\le x_1\le x_{n-1}\le 1$, és $x_n\ge 0$, $f(x_1,\dots,x_n)=0$ egyébként. Ez azt jelenti, hogy $f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=h(x_1,\dots,x_{n-1})g(x_n)$, ahol $h(x_1,\dots,x_{n-1})=(n-1)!$, ha $0\le x_1\le\dots\le x_{n-1}$, $h(x_1,\dots,x_{n-1})=0$, egyébként, $g(x_n)=\dfrac{x_n^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x_n}$, ha $x_n\ge 0$, $g(x_n)=0$, ha $x_n<0$. Ez azt jelenti, hogy az $\left(\dfrac{S_1}{S_n},\dots,\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ vektor és S_n valószínűségi változók függetlenek, az $\left(\dfrac{S_1}{S_n},\dots,\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ vektor eloszlása megegyezik $n-1$ független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból készített rendezett minta eloszlásával, az S_n valószínűségi változó eloszlása pedig, melynek sűrűségfüggvénye $g(y)=\dfrac{y^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda y}$, ha $y\ge 0$, és $g(y)=0$, ha $y<0$, megegyezik n független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlásával.

7. Válasszunk a $[0,1]$ intervallumban egy x számot véletlenül egyenletes eloszlással, és írjuk azt $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha(k)10^{-k}$, $0\le\alpha(k)\le 9$, alakban, azaz írjuk fel az x szám tízedestört előállítását. Lássuk be, hogy az $\alpha(k)$, $k=1,2,\dots$, valószínűségi változók függetlenek, egyforma eloszlásúak, és $P(\alpha(k)=j)=\dfrac{1}{10}$, $0\le j\le 9$. Másképp megfogalmazva: Egy véletlen szám tizedestörtjének a jegyei független és egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

Megoldás: Azt kell belátni, hogy tetszőleges $m\ge 1$ számra és $j_1,\dots,j_m$, egész számokra, $0\le j\le 9$,

$$P(\alpha(k)=j_k,\ 1\le k\le m)=10^{-m}.$$

Viszont

$$\begin{aligned}\{x\colon x \text{ olyan szám, melynek tízedesjegyeire } \alpha(k) = j_k,\ 1 \le k \le m\} \\ = \left\{x\colon \sum_{k=1}^{m} j_k 10^{-k} \le x \le \sum_{k=1}^{m} j_k 10^{-k} + 10^{-m}\right\},\end{aligned}$$

ezért valóban $P(\alpha(k) = j_k,\ 1 \le k \le m) = 10^{-m}$.