A november 6-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Az alábbi feladatot részben megbeszéltük a múlt gyakorlaton. Most felidézzük az eredményt, mert azt bizonyos további érvelésekben használni fogjuk.

1. Legyen egy ξ valószínűségi változónak k-ik abszolut momentuma, azaz tegyük fel, hogy $E|\xi|^k < \infty$. Ekkor a ξ valószínűségi változó $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ k-szor deriválható, és $\left.\dfrac{d^j\varphi(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = i^j E\xi^j$ minden $1 \le j \le k$ számra.

$$\left| e^{it} - \left(1 + it + \frac{i^2t^2}{2} + \frac{i^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{i^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right| \le \frac{t^k}{k!}.$$

Ezért, ha a ξ valószínűségi változónak létezik k-ik abszolut momentuma, akkor $m_j = E\xi^j$ jelöléssel

$$\left|\varphi(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{i^j t^j m_j}{j!}\right| \le \frac{t^k E|\xi|^k}{k!}.$$

Speciálisan, ha ξ olyan valószínűségi változó, melyre $E\xi = 0$, $E\xi^2 = \sigma^2$, $E|\xi^3| < \infty$, akkor annak $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényére teljesül a $\left|\varphi(t) - \left(1 - \dfrac{\sigma^2t^2}{2}\right))\right| \le \dfrac{t^3E|\xi|^3}{6}$ egyenlőtlenség. Ha nem feltétlenül van abszolut hartmadik momentum, akkor $\varphi(t) = 1 - \dfrac{\sigma^2t^2}{2} + o(t^2)$, ha $t = o(1)$. (Ez úgy is írható, hogy $\varphi(t) = e^{-t^2/2+o(t^2)}$, ha $t = o(1)$.)

Megoldás: Az első azonosság következménye az e^{it} függvény $k-1$ tagú Taylor sorfejtésének. Azt kell tudni, hogy annak finomabb alakjából az is látható, hogy a maradéktag becsülhető a jobboldalon szereplő kifejezéssel. Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget a $t\xi$ valószínűségi változóra, majd azt kiintegrálva (véve a két oldal várható értékét) megkapjuk a második össszefüggést. Az utolsó reláció bizonyítása érdekében vegyük először észre, hogy ha $E\xi^2 < \infty$, akkor tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $K = K(\varepsilon) > 0$ szám, melyre $\int_{|u|\ge K} u^2\, F(\,du) < \varepsilon$, ahol $F(\cdot)$ jelöli a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Igaz, hogy

$$\begin{aligned}\left|\varphi(t) - \left(1 - \frac{\sigma^2t^2}{2}\right)\right| &= \left|\varphi(t) - \left(1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2\right)\right| \\ &= \left|\int \left(e^{itu} - 1 - itu + \frac{t^2u^2}{2}\right) F(\,du)\right| \\ &\le \int_{|u|\le K} |\cdots| F(\,du) + \int_{|u|>K} |\cdots| F(\,du).\end{aligned}$$

Továbbá, ha t olyan kicsi, hogy $|tK^3| < \varepsilon$ alkalmas kis $\delta = \delta(\varepsilon)$ számra, akkor

$$\left|e^{itu} - 1 - itu + \frac{t^2u^2}{2}\right| < \frac{|t^3u^3|}{6} \le \varepsilon t^2, \quad \text{ha } |t| \le K$$

és

$$\int_{|u|<K} \left|\left(e^{itu} - 1 - itu + \frac{t^2u^2}{2}\right)\right| F(\,du) \le \varepsilon t^2.$$

Ha $t \ge K$, akkor kissé másképp érdemes becsülni. Ekkor

$$\left|\left(e^{itu} - 1 - itu + \frac{t^2u^2}{2}\right)\right| \le \left|\left(e^{itu} - 1 - itu\right)\right| + \left|\frac{t^2u^2}{2}\right| \le \frac{t^2u^2}{2} + \frac{t^2u^2}{2} \le t^2u^2,$$

ezért

$$\int_{|u|\ge K} \left|\left(e^{itu} - 1 - itu + \frac{t^2u^2}{2}\right)\right| F(\,du) \le t^2 \int_{|u|\ge K} u^2 F(\,du) \le \varepsilon t^2.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\left|\varphi(t) - \left(1 - \frac{\sigma^2t^2}{2}\right)\right| \le 2\varepsilon t^2,$$

ha $|t| \le t(\varepsilon)$ alkalmas $t(\varepsilon)$ küszöbindex választással. Mivel a fenti egyenlőtlenség minden $\varepsilon > 0$ és (az ε-tól függő) kis t számra igaz, innen következik a feladat utolsó állítása.

2. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Lássuk be az eddig tárgyalt eredmények alapján, hogy az $S_n = n^{-1/2} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a nulla várható értékű σ^2 szórásnégyzetú normális eloszlásfüggvényhez.

   Megoldás: Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges t számra $\lim\limits_{n\to\infty} Ee^{itS_n} = e^{-\sigma^2t^2/2}$. Másrészt, láttuk, hogy $Ee^{itS_n} = \left(Ee^{it\xi_1/\sqrt{n}}\right)^n = \varphi(n^{-1/2}t)^n$, ahol $\varphi(t) = Ee^{it\xi_1}$ a ξ_1 vakószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Viszont láttuk, hogy nagy n-re, és rögzített t számra $n^{-1/2}t$ kicsi, ezért $\varphi(tn^{-1/2}) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) = e^{-t^2/2n(1+o(1))}$, ahonnan $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(tn^{-1/2}) = e^{-t^2/2}$.

Tekintsünk egy ξ egész értékú valószínűségi változót, és annak $p(k) = P(\xi = k)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ eloszlását. Definiáljuk a $p(k)$ sorozat segítségével a

$$P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(k)e^{ikt}, \quad -\pi \le t \le \pi$$

Fourier sort. Ekkor a Fourier sorok egyik alapvető formulája alapján ennek a Fourier sornak az együtthatóit ki lehet számítani a

$$p(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} P(t)\, dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{a}$$

formula segítségével. Ezért, ha jó aszimptotikus formulát tudunk adni a $P(t)$ Fourier sorra, és jól tudjuk becsülni az (a) formulában szereplő integrált, akkor jó becslést kapunk a minket érdeklő $p(k)$ valószínűségekre is. A $P(t)$ Fourier sor tulajdonképpen a ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Ezért, ha ξ független valószínűségi változók normalizált összege, akkor sok esetben jól tudjuk kezelni a karakterisztikus függvényt, és az (a) formula segítségével. Megmutatjuk az alábbiakban, hogyan lehet e módszer segítségével a Stirling formulát bebizonyítani.

3.) Számoljuk ki egy ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. (Azaz $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Tekintsük a $\lambda = n$ esetet, és számoljuk ki a $P(\xi = n)$ valószínűséget az (a) formula segítségével. Mutassuk meg e formula segítségével, hogy

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{2\pi}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\, dt}.$$

Megoldás: Ha ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, azaz $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, akkor

$$Ee^{it\xi} = P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda + ikt} = e^{-\lambda + \lambda e^{it}}.$$

Innen, és a (a) formulából kapjuk $\lambda = n$ és $k = n$ választással, hogy

$$\frac{n^n}{n!} e^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-n - int + ne^{it}},$$

és ez ekvivalens a feladatban felírt azonossággal.

4.) Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

és

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Megoldás: A feladat második relációja az első reláció és a az $\dfrac{1}{1+x} = 1-x+O(x^2) = 1+O(x)$, ha $|x| \le \frac{1}{2}$ reláció egyszerű következménye.

Az első reláció bizonyítása érdekében adjunk felső becslést az integrál hozadékára a $\{t\colon |t| \ge n^{-1/3}\}$ tartományban. Azután tekintsük az integrál megszorítását a $\{t\colon |t| < n^{-1/3}\}$ tartományra, és számítsuk ki ennek aszimptotikáját pontosan.

Az első becslés elvégzésének érdekében vegyük észre, hogy

$$\left|e^{n(e^{it}-1-it)}\right| = e^{n\Re(e^{it}-1-it)} = e^{n(\cos t-1)} < e^{-nt^2/4} < e^{-n^{1/3}/4} \text{ ha } n^{-1/3} \le t \le \pi$$

és innen

$$\left|\int_{\{n^{-1/3}\le|t|\le\pi\}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt\right| = O\left(e^{-\text{const.}\, n^{1/3}}\right). \tag{1}$$

A másik becslés végrehajtása érdekében számítsuk ki az integrandus aszimptotikáját Taylor-sorfejtés segítségével pontosabban az origo kis környezetében. Azt kapjuk, hogy $n(e^{it}-1-it) = n\left(-\dfrac{t^2}{2} - i\dfrac{t^3}{6} + O(t^4)\right)$, és

$$\begin{aligned} e^{n(e^{it}-1-it)} &= e^{-nt^2/2}e^{-int^3/6+O(nt^4)} \\ &= e^{-nt^2/2}\left(1-\frac{i(\sqrt{n}t)^3}{6\sqrt{n}} + O\left(\frac{(\sqrt{n}t)^4}{n}\right) + O\left(\frac{(\sqrt{n}t)^6}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

ha $|t| \le n^{-1/3}$. Felhasználva ezt a becslést és elvégezve az $\bar t = \sqrt{n}t$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt &= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n^{1/6}}^{n^{1/6}} e^{-\bar t^2/2}\left(1-i\frac{\bar t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{O\left(\bar t^4+\bar t^6\right)}{n}\right)d\bar t \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{|\bar t|>n^{1/6}}\right). \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\left(1-i\frac{t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{O(t^4+t^6)}{n}\right)dt \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{6\sqrt{n}}t^3e^{-t^2/2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$ azonosság miatt, illetve azért mert a $t^3e^{-t^2/2}$ függvény páratlan. Ezenkívül

$$\int_{|t|\ge n^{1/6}} e^{-t^2/2}\left(1-i\frac{t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{O(t^4+t^6)}{n}\right)dt = O\left(e^{-n^{1/3}/4}\right).$$

Ezekből a becslésekből következik, hogy

$$\int_{-n^{-1/3}}^{n^{1/3}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2}$$

A feladat első állítása következik az (1) és (2) formulákból.

5. Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

   Ezért $\mathrm{Var}\,\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

6. Legyen birtokunkban 100 lámpa, melyek mindegyike egymástól független időtartamig működik, élettartamuk pedig exponenciális eloszlású $\lambda = \dfrac{1}{10}$ paraméterrel. (A lámpák élettartamának exponenciális eloszlása természetes feltételezés.) Egy termet bevilágítunk ezen lámpák valamelyikével, majd amikor az kiégett új lámpát használunk fel. Adjunk jó becslést arra, hogy a lámpák összélettartama legalább 1150 óra.

   Megoldás: Jelölje ξ_j a j-ik lámpa élettartamát, $1 \le j \le 100$. Ekkor a $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150)$ valószínűségre kell jó becslést adnunk, ahol az összegben független exponenciális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. Vezessük be az $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$ jelölést.

   Kiszámoltuk, hogy jelen esetben $E\eta = mE\xi_1 = \dfrac{m}{\lambda} = 1000$, $\mathrm{Var}\,\eta = \dfrac{m}{\lambda^2} = 10000$ ($m = 100$ és $\lambda = \dfrac{1}{10}$ választással). Ezért a centrális határeloszlástétel szerint $\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\mathrm{Var}\,\eta}} = \dfrac{\eta - 1000}{100}$ jó közelítéssel standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150) = P\left(\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\mathrm{Var}\,\eta}} > 1.5\right) \sim 1 - \Phi(1.5)$.

6a. Legyen birtokunkban 100 lámpa, melyek mindegyike egymástól független időtartamig működik, élettartamuk pedig exponenciális eloszlású. Azt a hipotézist akarjuk ellenőrizni, hogy a lámpák élettartama legalább 10 óra, azaz az exponenciális eloszlás paramétere kisebb vagy egyenlő mint $\lambda = \dfrac{1}{10}$. Egy termet bevilágítunk ezen lámpák valamelyikével, majd amikor az kiégett új lámpát használunk fel. Megfigyeljük, hogy mennyi a lámpák összélettartama. Ennek alapján akarjuk eldönteni, hogy hipotézisünk helyes-e. Természetes úgy dönteni, hogy amennyiben a lámpák elég sokáig égnek, akkor elfogadjuk a hipotézist, ha pedig nem akkor elutasítjuk. Mekkora élettartam esetén fogadjuk el a hipotézist, ha azt akarjuk, hogy a hipotézis teljesülése esetén legalább 0.95 valószűséggel fogadjuk azt el. (A matematikai statisztika szokásos terminológiájával ezt a követelményt úgy fogalmazzák meg, hogy az elsőfajú hiba legyen kisebb mint 0.05.)

Megoldás: Jelölje ξ_j a j-ik lámpa éléttartamát, $1 \le j \le 100$, és adjunk jó becslést $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > x)$ valószínűségre ha az összegben független exponenciális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (Ez a hipotézis teljesülése esetén a a legkellemetlenebb eset.) Vezessük be az $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$ jelölést.

Kiszámoltuk, hogy jelen esetben $E\eta = mE\xi_1 = \dfrac{m}{\lambda} = 1000$, $\operatorname{Var}\eta = \dfrac{m}{\lambda^2} = 10000$ ($m = 100$ és $\lambda = \dfrac{1}{10}$ választással). Ezért a centrális határeloszlástétel szerint $\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} = \dfrac{\eta - 1000}{100}$ jó közelítéssel standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > x) = P\left(\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} > x\right) \sim 1 - \Phi\left(\dfrac{x}{100} - 10\right)$. Ezért természetes az x szintet úgy választani, hogy $1 - \Phi\left(\dfrac{x}{100} - 10\right) = 0.95$, és ha az összélettartam nagyobb mint ez a szint akkor elfogadjuk a hipotézist. Innen $\Phi\left(10 - \dfrac{x}{100}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{x}{100} - 10\right) = 0.95$. Mivel $\Phi(1.645) \sim 0.95$, ezért $x = 835.5$.