Az október 2-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

1. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ valószínűségi változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, azaz tegyük fel, hogy $\{\omega\colon \xi_j(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra és a számegyenes minden B Borel mérhető részhalmazára. Lássuk be, hogy

$$C = \left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega) = c\right\} \in \mathcal{A}$$

minden c valós számra, tehát van értelme a fenti esemény valószínűségéről beszélni.

Megoldás: Definiáljuk a

$$C(\varepsilon) = \left\{\omega\colon \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega) < c+\varepsilon,\ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega) > c-\varepsilon\right\}$$

halmazokat. Ekkor $C = \bigcap\limits_{\varepsilon\colon\, \varepsilon>0} C(\varepsilon)$. Sőt felírhatjuk a $C = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} C\left(\frac{1}{m}\right)$ relációt is. Ez utóbbi formula azért hasznosabb a számunkra, mert ebben csak megszámlálható sok halmaz szerepel. Ezért annak bizonyításához, hogy $C \in \mathcal{A}$ elég belátni azt, hogy $C\left(\frac{1}{m}\right) \in \mathcal{A}$ minden $m = 1, 2, \dots$ számra, és ez utóbbi állítás bizonyítása egyszerűbb.

Valóban $\omega \in C\left(\frac{1}{m}\right)$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan M egász szám, melyre

$$c - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega) < c + \frac{1}{m} \quad \text{minden } n \ge M \text{ számra,}$$

és ez képletekkel a következőképp is kifejezhető. Legyen

$$C\left(\frac{1}{m}, M\right) = \left\{\omega\colon c - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega) < c + \frac{1}{m} \quad \text{minden } n \ge M \text{ számra}\right\}$$

és

$$C\left(\frac{1}{m}, n\right) = \left\{\omega\colon c - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega) < c + \frac{1}{m}\right\}.$$

Ekkor $C\left(\frac{1}{m}, M\right) = \bigcap\limits_{n=M}^{\infty} C\left(\frac{1}{m}, n\right)$, és $C\left(\frac{1}{m}\right) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} C\left(\frac{1}{m}, M\right)$.

Használjuk fel azt a mértékelméleti eredményt, mely szerint valószínűségi változzxók összege (szorzata) is valószínűségi változó, azaz abból, hogy $\{\omega\colon \xi_j(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra és B Borel mérhető halmazra következik az, hogy

$$\left\{\omega\colon \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega) \in B\right\} \in \mathcal{A}$$

minden $n = 1, 2, \dots$ számra és B Borel mérhető halmazra. Ezért $C\left(\frac{1}{m}, n\right) \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ és $m = 1, 2, \dots$ számra. Ebből viszont a fenti formulák alapján az is következik, hogy a $C\left(\frac{1}{m}, n\right) \in \mathcal{A}$, $C\left(\frac{1}{m}, M\right) \in \mathcal{A}$ és $C\left(\frac{1}{m}\right) \in \mathcal{A}$ relációk teljesülnek minden $m = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, $M = 1, 2, \dots$ számra, ahonnan $C \in \mathcal{A}$ szintén teljesül.

Állítás. *Egy k változós $f(x_1, \dots, x_k)$ akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ valószínűségi vektornak, ha teljesíti az $f(x_1, \dots, x_k) \geq 0$ minden $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ pontban, és*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_k = 1.$$

Adva egy $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlású $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ valószínűségi vektor, akkor annak valószínűsége, hogy ez a véletlen vektor beleesik egy $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^k$ (mérhető) halmazban

$$P\left((\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbf{B}\right) = \int_{\mathbf{B}} F(\,dx_1, \dots, \,dx_k).$$

Kissé általánosabban, ha $g(x_1, \dots, x_k)$ k-változós függvény, akkor

$$Eg(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int g(x_1, \dots, x_k) F(\,dx_1, \dots, \,dx_k).$$

Ha az $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(x_1, \dots, x_k)$ sűrűségfüggvénye, akkor

$$P\left((\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbf{B}\right) = \int_{\mathbf{B}} f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_k,$$

és

$$Eg(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int g(x_1, \dots, x_k) f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1, \dots, \,dx_k.$$

Speciálisan, ha ξ és η két független valószínűségi változó $F(x)$ és $G(y)$ eloszlásfüggvénnyel, ($f(x)$ és $g(y)$ sűrűségfüggvénnyel) akkor a (ξ, η) vektornak az eloszlásfüggvénye $F(x)G(y)$, (sűrűségfüggvénye pedig $f(x)g(y)$). Ezért a fentiek alapján a $\xi + \eta$ összeg eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta < x) &= \int\int_{(u,v),\, u+v<x} F(\,du) G(\,dv) \quad \text{és ha létezik sűrűségfüggvény} \\ &= \int\int_{(u,v),\, u+v<x} f(u) g(v)\, du\, dv \quad \text{minden } x \in \mathbf{R} \text{ számra.} \end{aligned}$$

Ennek alapján meg tudjuk érteni, hogy független valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét hogyan lehet kiszámítani az eredeti valószínűségi változók sűrűségfüggvényei konvoluciójának a segítségével. Ha ξ és η két független valószínűségi változó

$f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor a $\xi+\eta$ összeg sűrűségfüggvénye $h(x) = \dfrac{d}{dx}P(\xi+\eta<x)$ a következő módon számolható ki:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{d}{dx}P(\xi+\eta<x) = \frac{d}{dx}\int\int_{\{(u,v)\colon\, u+v<x\}} f(u)g(v)\,du\,dv \\ &= \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar u)g(\bar v-\bar u)\,d\bar u\right]d\bar v = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du \end{aligned}$$

A fenti számolások első azonosságában egy integráltranszformációt alkalmaztunk $\bar v = u+v$, $\bar u = u$ helyettesítéssel (majd később $\bar u$ és $\bar v$ helyett ismét u és v változót írtunk.) Felhasználtuk, hogy e transzformáció során az $\{(u,v)\colon u+v<x\}$ tartomány a $\{(\bar u,\bar v)\colon \bar v<x,\ -\infty<\bar u<\infty\}$ tartományba megy át, és a fenti (lineáris) transzformáció Jakobiánja azonosan 1. Az utolsó azonosságban a $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} H(v)\,dv = H(x)$ azonosságot alkalmaztuk $H(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v-u)\,du$ választással.

1. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ha $x\ge 0$, és $f(x)=0$, ha $x>0$. Számítsuk ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét. Általánosabban, legyenek $\xi_1,\dots\xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda>0$ paraméterrel. Számítsuk ki $\xi_1+\cdots+\xi_m$ sűrűségfüggvényét.

   Ki kell számolnunk az $f*f(x)$ illetve $\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x)=0$, ha $x\le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y\le 0$ vagy $x-y\le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x\ge 0$ esetén lehet nulla, az $x\le 0$ esetben $f(y)f(x-y)>0$ minden y-ra nulla, és $x\ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y)>0$ integrandus csak $0\le y\le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x)=f*f(x)$ $x<0$-ra $f_2(x)=0$, és

$$\begin{aligned} f_2(x) = f*f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\ &= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x\ge 0. \end{aligned}$$

   Hasonlóan, ha $f_m(x)=\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1+\cdots\xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x)=0$ minden $m\ge 1$ számra, ha $x<0$. Azt állítjuk, hogy $f_m(x)=\dfrac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1}*f(x)=f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$\begin{aligned} f_{m-1}*f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda^{m-1}\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\lambda e^{-\lambda y}e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\ &= \lambda^m e^{-\lambda x}\int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy = e^{-\lambda x}\frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \text{ha } x\ge 0. \end{aligned}$$

2. Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\dfrac{\xi}{\eta}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás. Az eloszlásfüggvény

$$F(x) = P\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = \iint_{v<xu} \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}\, du\, dv$$
$$= 2\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2} \varphi < \arctan x} \int_0^\infty r e^{-r^2/2}\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x,$$

a sűrűségfüggvény pedig $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Második megoldás. A (ξ, η) vektor sűrűségfüggvénye $\frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen k0vetkeik, hogy annak valószínűsége, hogy a (ξ, η) vektor egy origóból kiinduló α szögű szögtartományba esik, $\dfrac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

$$P\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = P\left((\xi, \eta) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \arctan x\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \arctan x + \pi\right) \text{szögtartományban}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} 2\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x.$$

3.) Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás: $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$. Írjuk fel ξ^2 sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{-x/2}$, és $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{u(x-u)}\pi} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2}\, du = e^{-x/2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}\pi}\, dv = \frac{1}{2} e^{-x/2}$$

Megjegyzés: Az x paramétertől függő $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}\pi}\, dv$ integrált meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Hogyan? Vagyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}\pi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (v - \frac{1}{2})^2}}.$$

4. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó akkor $\sigma\xi + m$ egy m várható értékű és σ-négyzet szórásnégyztű normális eloszlású valószínűségi változó. Legyen η_1 és η_2 két független normális eloszlású vaószínűségi változó m_1 illetve m_2 várható

értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel. Lássuk be, hogy $\eta_1+\eta_2$ m_1+m_2 várható értékű és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás: Egy ξ valószínűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$. Ezért, $\eta_1+\eta_2$ sűrűségfüggvénye

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-(u-m_1)^2/2\sigma_1^2} e^{-(x-u-m_2)^2/2\sigma_2^2}\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Bigg\{-u^2\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}\right)+u\left(\frac{m_1}{\sigma_1^2}+\frac{x-m_2}{\sigma_2^2}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\Bigg\}\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Bigg\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(u-\frac{m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 \\
&\qquad\qquad + \frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\Bigg\}\, du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left\{\frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Házi feladat:

Legyen ξ és η két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki $\xi-\eta$ sűrűségfüggvényét.