Az október 30-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Karakterisztikus függvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$, $-\infty < t < \infty$, (a valós számokon értelmezett komplex számértékű) függvény. (Itt $i = \sqrt{-1}$.) Ha a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(\cdot)$, akkor karakterisztikus függvény az alábbi formulával is kiszámítható:*

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} F(\,du)$$

1. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $\varphi_k(t) = Ee^{it\xi_k}$, $1 \le k \le n$, karakterisztikus függvényekkel. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ összeg karakterisztikus függvénye a $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(t)$. Ha a ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi(t)$, akkor az $a\xi + b$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi_{a,b}(t) = e^{ibt}\varphi(at)$.

   Megoldás: Ha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, akkor

   $$\varphi(t) = Ee^{it(\xi_1+\cdots+\xi_n)} = E\left(e^{it\xi_1}\cdots e^{it\xi_n}\right) = Ee^{it\xi_1}\cdots Ee^{it\xi_n} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t),$$

   és

   $$\varphi_{a,b}(t) = Ee^{it(a\xi+b)} = Ee^{it(at\xi)}e^{itb} = e^{itb}Ee^{i(at)\xi} = Ee^{it(tb)}\varphi(at).$$

2. Legyen egy ξ valószínűségi változónak k-ik abszolut momentuma, azaz tegyük fel, hogy $E|\xi|^k < \infty$. Ekkor a ξ valószínűségi változó $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ k-szor deriválható, és $\left.\dfrac{d^j\varphi(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = i^jE\xi^j$ minden $1 \le j \le k$ számra.

   $$\left| e^{it} - \left(1 + it + \frac{i^2t^2}{2} + \frac{i^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{i^kt^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right| \le \frac{t^k}{k!}.$$

   Ezért, ha a ξ valószínűségi változónak létezik k-ik abszolut momentuma, akkor $m_j = E\xi^j$ jelöléssel

   $$\left|\varphi(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{i^jt^jm_j}{j!}\right| \le \frac{t^kE|\xi|^k}{k!}.$$

   Speciálisan, ha ξ olyan valószínűségi változó, melyre $E\xi = 0$, $E\xi^2 = \sigma^2$, $E|\xi^3| < \infty$, akkor annak $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényére teljesül a $\left|\varphi(t) - \left(1 - \dfrac{\sigma^2t^2}{2}\right))\right| \le \dfrac{t^3E|\xi|^3}{6}$ egyenlőtlenség.

Megoldás: Az első azonosság következménye az e^{it} függvény $k-1$ tagú Taylor sorfejtésének. Azt kell tudni, hogy annak finomabb alakjából az is látható, hogy a maradéktag becsülhető a jobboldalon szereplő kifejezéssel. Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget a $t\xi$ valószínűségi változóra, majd azt kiintegrálva (véve a két oldal várható értékét) megkapjuk a második össszefüggést.

Megjegyzés: Korábban láttuk, hogy a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye az $e^{-t^2/2}$ függvény. A fenti eredmények lehetővé teszik, hogy független valószínűségi változók normalizált összegeinek karakterisztikus függvénye konvergál a standard normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez.

3. Az m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlás karakterisztikus függvénye $e^{itm-\sigma^2t^2/2}$. Lássuk be ennek a formulának és annak a ténynek a felhasználásával, hogy egy eloszlásfüggvényt meghatároz annak karakterisztikus függvénye azt az eredményt, hogy ha ξ_1 és ξ_2 két független normális eloszlású valószínűségi változó m_1 illetve m_2 várható értékkel, σ_1^2 és σ^2 szórásnégyzettel, akkor $\xi_1+\xi_2$ normális eloszlású valószínűségi változó m_1+m_2 várható értékkel és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzettel.

   Megoldás: Egy m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű ξ valószínűségi változó $\xi=\sigma\eta+m$ alakban írható, ahol η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ezért ξ karakterisztikus függvénye $Ee^{it\xi}=Ee^{it(\sigma\eta+m)}=e^{itm}Ee^{i\sigma t\eta}=e^{itm}e^{-\sigma^2t^2/2}=e^{itm-\sigma^2t^2/2}$. Innen következik, hogy az adott feltételek mellett $\xi_1+\xi_2$ karakterisztikus függvénye $e^{itm_1-\sigma_1^2t^2/2}e^{itm_2-\sigma_2^2t^2/2}=e^{it(m_1+m_2)-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}$, ez pedig az m_1+m_2 várható értékű és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlás karakterisztikus függvénye.

4. Legyenek S_k, $k=1,2,\dots$, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[-k,k]$ intervallumon, azaz legyen S_k sűrűségfüggvénye $f_k(x)=\dfrac{1}{2k}$, ha $-k\le x\le k$, és $f_k(x)=0$ egyébként. Lássuk be, hogy az S_k valószínűségi változók karakterisztikus függvényei tartanak minden pontban egy határfüggvényhez, de ez a határfüggvény nem folytonos a nullában. Következésképp az S_k valószínűségi változók nem konvergálnak eloszlásban.

   Megoldás:

$$\varphi_k(t)=Ee^{itS_k}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}f_k(u)\,du=\int_{-k}^{k}\frac{e^{itu}}{2k}\,du=\frac{e^{itk}-e^{-itk}}{2ikt}=\frac{\sin kt}{kt},$$

   ha $t\neq 0$. Másrészt $\varphi_k(0)=1$. Innen következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(t)=0$, ha $t\neq 0$, és $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(0)=1$, ha $t\neq 0$, tehát a karakterisztikus függények sorozatának határfüggvénye a nullában nem folytonos. Az S_k valószínűsségi változók valóban nem konvergálnak eloszlásban egy határeloszláshoz, mert $\lim\limits_{k\to\infty}P(S_k\in B)=0$ tetszőleges korlátos halmazra. Következésképpen az S_k valószínűségi változók eloszlásai "kifolynak a végtelenbe", ahogy $k\to\infty$.

5. Számoljuk ki egy $(1,p)$ paraméterű ξ negativ binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. (Azaz $P(\xi=k)=(1-p)p^{k-1}$, $k=1,2,\dots$).

Megoldás: Ha ξ $(1,p)$ paraméterű negativ binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)p^{k-1}\qquad E\xi^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)p^{k-1}$$

Ezen összegek egyik lehetséges kiszámolása: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=\dfrac{1}{1-x}$, ha $|x|<1$. Két egymás utáni deriválással kapjuk, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ és $\sum\limits_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\dfrac{2}{(1-x)^3}$. Innen $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}=\dfrac{1}{(1-p)^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2p^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}+p\sum\limits_{k=2}^{\infty}k(k-1)p^{k-2}=\dfrac{1}{(1-p)^2}+\dfrac{2p}{(1-p)^3}$, és $E\xi=\dfrac{1}{1-p}$, $E\xi^2=\dfrac{1}{1-p}+\dfrac{2p}{(1-p)^2}$. Ezért $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\dfrac{p}{(1-p)^2}$.

6. Vegyünk egy olyan pénzdarabot, mely $\frac{2}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel az írás oldalra. Ezt a pénzdarabot annyiszor dobjuk fel, ameddig megjelenik 1200 fej dobás. Mi annak a valószínűsége, hogy az elvégzett dobások száma 1680 1830 közé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést.

Az elvégzett dobások száma negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó $n=1200$ $p=\frac{1}{3}$ paraméterekkel, és egy ilyen valószínűségi változónak ki lehet számolni a pontos eloszlását, azaz azt, hogy milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel. Elvileg, ez lehetőséget ad a kívánt valószínűség kiszámítására egy bonyolult összeg kiszámításának a segítségével. Ennél hasznosabb becslést tudunk kapni a következő érvelés segítségével, mely a kívánt valószínűséget jó pontossággal kiszámítja a centrális határeloszlástétel segítségével.

Jelölje ξ_j, $2\le j\le 1200$ a $j-1$-ik és j-ik fejdobás közötti dobások számát (a j-ik fejdobást beleszámítjuk a $j-1$-iket viszont nem számítjuk bele e dobások közé), és legyen ξ_1 az első fejdobásig (ezt is beleszámítva) elvégzett dobások száma. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, negatív binomiális eloszlásúak $n=1$, $p=\dfrac{1}{3}$ paraméterekkel, és minket a $P(1680<\xi_1+\cdots+\xi_{1200}<1830)$ valószínűség érdekel. Megmutattuk az 5. feladatban, hogy $E\xi_j=\dfrac{1}{1-p}=\dfrac{3}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j=\dfrac{p}{(1-p)^2}=\dfrac{3}{4}$. Ezért a centrális határeloszlástétel alapján $\eta=\xi_1+\cdots+\xi_{1200}$ jelöléssel minket a $P\left(-4<\dfrac{\eta-1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}}<1\right)$ valószínűség érdekel. A centrális határeloszlástétel alapján $P\left(-4<\dfrac{\eta-1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}}<1\right)\sim\Phi(1)+\Phi(4)-1\sim\Phi(1)$.

Házi feladat.

Egy szabályos dobókockát feldobunk 2700 alkalommal egymástól függetlenül, és összeszámoljuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 420 és 720 közé esik.

Segítség: Vezessük be a $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2 $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5, $1 \le j \le 2700$. Ekkor minket a $P\left(420 < \sum\limits_{j=1}^{2700} \xi_j < 720\right)$ valószínűség érdekel. Számítsuk ki a ξ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét, és alkalmazzuk a centrális határeloszlástételt.