Az október 9-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Az előző gyakorlaton megbeszéltük az alábbi feladatot. Megadtuk a feladat egy olyan (itt is ismertetett) megoldását, melyben bizonyos integrálokat átírtunk polár koordinátarendszerben. Beszéljük meg, hogyan kell többváltozós integrálokat átírni általában, mit jelent a Jacobian, és miért jelenik ez meg ebben a transzformációs képletben. Ezt ezen ismertetés végén ismertetem. Ezenkívül idézzük fel a legfontosabb tudnivalókat a normális eloszlásfüggvényről.

Standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha $P(\xi < x) = \Phi(X) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$. Ezen $\Phi(x)$ eloszlás $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűségfüggvénynek hívják.*

Tétel. *A standard normális eloszlásfüggvénynek nevezett*

$$P(\xi < x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$$

függvény valóban eloszlásfüggvény. Ez azt jelenti, hogy teljesül az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 1$ azonosság, (és néhány az adott esetben nyilvánvaló összfüggés, melyek ahhoz kellenek, hogy $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény legyen.) Egy standard normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke nulla, szórásnégyzete 1, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 0, \quad \textit{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 1.$$

Megjegyzés: *Ha egy ξ valószínűségi változó eloszlása a $\Phi(x)$ standard normális eloszlásfüggvény, akkor egy $\sigma\xi + m$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ eloszlás és $\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/\sigma^2}$ sűrűségfüggvényét normális eloszlás illetve normális sűrűségfüggvénynek nevezik tetszőleges $-\infty < m < \infty$ és $\sigma > 0$ esetén.*

A normális eloszlás rendkívül fontos szerepet játszik a valószinűségszámításban, mert független valószínűségi változók normalizált részletösszegeinek eloszlásai nagyon általános feltételek mellett a normális eloszláshoz konvergálnak. Jegyezzük meg, hogy mint azt egy az ezen a gyakorlaton is tárgyalandó feladatban is megmutatjuk, két független normális eloszlású valószínűségi változó összege is normális eloszlású.

0. Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\frac{\xi}{\eta}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás. Az eloszlásfüggvény

$$F(x) = P\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = \iint_{v<xu} \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}\, du\, dv$$
$$= 2\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2} \varphi < \arctan x} \int_0^\infty r e^{-r^2/2}\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x,$$

a sűrűségfüggvény pedig $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

További feladatok:

1.) Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás: $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$. Írjuk fel ξ^2 sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$, és $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye az

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2}\, du = \frac{e^{-x/2}}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\, dv = \frac{1}{2} e^{-x/2}$$

függvény.

Megjegyzés: Az x paramétertől nem függő $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\, dv$ integrált meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott $f(x)$ függvény sűrűségfüggvény. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Hogyan? Vagyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (v - \frac{1}{2})^2}}.$$

2. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó akkor $\sigma\xi + m$ egy m várható értékű és σ-négyzet szórásnégyztű normális eloszlású valószínűségi változó. Legyen η_1 és η_2 két független normális eloszlású vaószínűségi változó m_1 illetve m_2 várható értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel. Lássuk be, hogy $\eta_1 + \eta_2$ $m_1 + m_2$ várható értékú és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás: Egy ξ valószínűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$ alakú.

Ezért $\eta_1 + \eta_2$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-(u-m_1)^2/2\sigma_1^2} e^{-(x-u-m_2)^2/2\sigma_2^2}\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Bigg\{ -u^2 \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2} \right) + u \left(\frac{m_1}{\sigma_1^2} + \frac{x-m_2}{\sigma_2^2} \right) \\
&\qquad\qquad - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2} \Bigg\} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Bigg\{ -\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(u - \frac{m_1\sigma_2^2 + (x-m_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \right)^2 \\
&\qquad\qquad + \frac{(m_1\sigma_2^2 + (x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2} \Bigg\} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left\{ \frac{(m_1\sigma_2^2 + (x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \right\}.
\end{aligned}$$

Házi feladat:

Legyen ξ és η két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki $\xi - \eta$ sűrűségfüggvényét.

3. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, és legyen t valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.

   Megoldás: Ha ξ $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó $h(x)$ valós értékű (mérhető) függvény, akkor $Eh(\xi) = \int h(x)f(x)\, dx$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx.$$

   Innen

$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t^2/2-(t-x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = e^{t^2/2}.$$

4. Adva egy ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó számítsuk ki $8\xi^3$ és ξ^4 eloszlás és sűrűségfüggvényét.

a.) $8\xi^3$ eloszás és sűrűségfüggvénye: $P(8\xi^3 < x) = P\left(\xi < \dfrac{x^{1/3}}{2}\right) = \Phi\left(\dfrac{x^{1/3}}{2}\right)$, tehát $8\xi^3$ eloszlásfüggvénye $\Phi\left(\dfrac{x^{1/3}}{2}\right)$, sűrűségfüggvénye pedig ennek deriváltja, azaz $\dfrac{1}{6}x^{-2/3}\varphi\left(\dfrac{x^{1/3}}{2}\right) = \dfrac{x^{-2/3}}{6\sqrt{2\pi}}e^{-x^{2/3}/8}$.

b.) ξ^4 eloszlás és sűrűségfüggvénye: $P(\xi^4 < x) = 0$, ha $x \le 0$, és $P(\xi^4 < x) = P(-x^{1/4} < \xi < x^{1/4}) = P(\xi < x^{1/4}) - P(\xi < -x^{1/4}) = \Phi(x^{1/4}) - \Phi(-x^{1/4})$, ha $x > 0$. Másrészt, mivel a $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény $\varphi(x)$ sűrűségfüggvénye páros függvény, ezért $\Phi(-x^{1/4}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-x^{1/4}} \varphi(u)\,du = \int_{x^{1/4}}^{\infty} \varphi(u)\,du = 1 - \int_{-\infty}^{x^{1/4}} \varphi(u)\,du = 1 - \Phi(x^{1/4})$. Ezért a ξ^4 valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $P(\xi^4 < x) = 2\Phi(x^{1/4}) - 1$, ha $x \ge 0$, és nullával egyenlő, ha $x < 0$. Sűrűségfüggvénye pedig ennek deriváltja $\frac{1}{2}x^{-3/4}\varphi(x^{1/4})$, ha $x \ge 0$, és nulla, ha $x < 0$.

Házi feladat:

Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumban. Számítsuk ki a ξ^2 és ξ^3 valószínűségi változók eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Értsük meg, hogy egy (sűrűségfüggvénnyel rendelkező) valószínűségi vektor transzformáltjának a sűrűségfüggvényét hogyan tudjuk kiszámolni, illetve azt, hogy hogyan szól az az integráltranszformációs képlet, amelyik egy ilyen számolás alapját képezi. A felidézendő eredmény annak az állításnak a több-dimenziós megfelelője, mely szerint $\int_a^b f(g(u))g'(u)\,du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$.

Az eredmény megfogalmazásához először felidézzük egy síma transzformáció Jacobian-jának a definicióját.

Jacobian definiciója. *Legyen $y_k = T_k(x_1, \dots, x_n)$, $1 \le k \le n$, az n-dimenziós tér egy tartományának síma transzformáltja az n-dimenziós tér egy másik tartományába. E transzformáció $\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1, \dots, x_n))$ Jacobianja egy $(x_1, \dots, x_n)$ pontban a*

$$\left(\frac{\partial T_k(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_l}\right), \quad 1 \le l, k \le n,$$

$n \times n$-es (az $(x_1, \dots, x_n)$ pontban vett derivált) mátrix determinánsának az abszolut értéke.

(A Jacobian szemléletes tartalma: Ez adja meg, hogy az $(x_1, \dots, x_n)$ pont kis környezetének a térfogatát a $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ transzformáció hányszorosára nagyítja ki.)

Integráltranszformációról szóló képlet. *Legyen adva az n-dimenziós tér egy A tartományának egy síma $y_k = T_k(x_1, \dots, x_n)$, $1 \le k \le n$, transzformáltja az n-dimenziós tér egy másik B tartományába. Legyen továbbá adva a B tartományon egy $f(y_1, \dots, y_n)$*

függvény. Ezen $f(y_1, \dots, y_n)$ függvénynek a $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ transzformáció által meghatározott ősképén azt az A tartományon értelmezett $g(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{T}^{-1} f(x_1, \dots, x_n)$ függvényt értjük az A tartományon, melyre

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(T_1(x_1, \dots, x_n), \dots, T_n(x_1, \dots, x_n))$$

minden $(x_1, \dots, x_n) \in A$ pontban. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\int_B f(y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n \\
&\quad = \int_A \frac{\mathbf{T}^{-1} f(x_1, \dots, x_n)}{\displaystyle\sum_{\substack{\text{olyan } (z_1,\dots,z_n) \in A \text{ pontok} \\ \text{melyekre } T_k(z_1,\dots,z_n) = T_k(x_1,\dots,x_n) \\ k=1,\dots,n}} \frac{1}{\mathcal{J}(\mathbf{T}(z_1, \dots, z_k))}}\, dx_1 \dots dx_n. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Értsük meg az $A(x_1, \dots, x_k)$ mátrix és $\mathcal{J}(\mathbf{T})(x_1, \dots, x_k)$ Jacobian szemléletes tartalmát.

Adva egy $(x_1, \dots, x_k)$ pont az R^k k-dimenziós térben, és kis $h_1, \dots, h_k$ számok, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(x_1 + h_1, \dots, x_k + h_k) - \mathbf{T}(x_1, \dots, x_k) &= (h_1, \dots, h_k) A(x_1, \dots, x_k) \\
&\quad + \text{elhanyagolhatóan kis hiba},
\end{aligned} \qquad (1)$$

azaz az $A(x_1, \dots, x_k)$ mátrix a számegyenesen értelmezett függvények deriváltjának természetes általánosítása. Ennek következménye, hogy a $h_1 \cdots h_k$ térfogatú $[x_1, x_1 + h_1] \times \cdots \times [x_k, x_k + _k]$ téglatest képe a $\mathbf{T}$ transzformáció hatására jó közelítéssel egy $\mathcal{J}(\mathbf{T})(x_1, \dots, x_k) h_1 \cdots h_k$ térfogatú tartomány. Ugyanis az (1) formula alapján ez a tartomány jó közelítéssel a

$$T(x_1, \dots, x_k) + ([0, h_1] \times \cdots \times [0, h_k])\, A(x_1, \dots, x_k)$$

a $T(x_1, \dots, x_k)$ pontba eltolt $h_1 \dots h_k \mathcal{J}(\mathbf{T})(x_1, \dots, x_k)$ térfogatú parallelepipedon.

Ez a geometriai kép, illetve a többdimenziós integrál definiciója (felosztjuk a $\mathbf{B} \subset R^k$ teret kis átmérőjű diszjunkt tartományok uniójára, ezen tartományok térfogatát megszorozzuk az integrálandó függvény értékével e tartomány valamelyik pontjában, majd összegezünk) sugallja az (1) formulát, melyet ennek a heurisztikus érvelésnek a finomításával (enyhe feltételek kikötése mellett) be lehet bizonyítani.

Lássuk az előbb tárgyalt integráltranszformációnak legfontosabb alkalmazását, azt hogy hogyan lehet kétváltozós integrálokat polár koordinátarendszerben kiszámolni.

Tekintsük az $A = \{(r, \varphi) \colon r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$ tartománynak az $x = r \cos \varphi$ és $y = r \sin \varphi$ képletekkel megadott kölcsönösen egyértelmű leképezését a síkra. (Pontosabban, ez a leképezés az A halmazt arra a B halmazra képezi, melyet úgy kapunk, hogy a síkból kihagyjuk az $\{(x,y)\colon x=0, y\le 0\}$ félegyenest, de egy síkbeli integrál értéke nem változik meg, ha egy félegyenest kihagyunk az integrálási tartományból.

Számoljuk ki a tekintett leképezés Jacobianját, majd mutassuk meg, hogy a kapott eredmény megfelel a szemléletes képnek. Egyszerű számolással, $\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}=-r\sin\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}=r\cos\varphi$, ezért a Jacobian értéke

$$\mathcal{J}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=\left|\det\begin{vmatrix}\cos\varphi, & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi, & r\cos\varphi\end{vmatrix}\right|=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r,$$

ahonnan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr\,d\varphi. \qquad (**)$$

Annak érdekében, hogy szemléletesen is megértsük miért jelenik meg a polár koordinátarendszerre való áttéréskor az r-rel való szorzás az integrandusban, tekintsük a következő feladatot:

Ha adva van egy $T=[r,r+\Delta r]\times[\varphi,\varphi+\Delta\varphi]$ téglalap, ahol Δr és $\Delta\varphi$ kis számok és alkalmazzuk az $A(r,\varphi)=(x,y)$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, leképezést, és tekintjük a T halmaz $A(T)$ képét, akkor mi lesz az $A(T)$ és T halmaz területének az aránya?

A T halmaz területe $\lambda(T)=\Delta r\Delta\varphi$. Az $A(T)$ halmaz azon pontokat tartalmazza az (x,y) síkon, melyeknek az abszolut értéke r és $r+\Delta r$ közé, az abszcissza tengellyel bezárt szöge pedig φ és $\varphi+\Delta\varphi$ közé esik. Ezért ennek területe $A(T)=(r+\Delta r)^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}-r^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}=r\Delta r\Delta\varphi+\dfrac{(\Delta r)^2\Delta\varphi}{2}$, ahonnan $\dfrac{\lambda(A(T))}{\lambda(T)}=r+\dfrac{\Delta r}{2}$. Innen következik, hogy a $\dfrac{\lambda(A(T))}{\lambda(T)}$ hányados az r számhoz tart, ha $\Delta r\to 0$, és $\Delta\varphi\to 0$. Ebből a formulából és az integráloknak a szokásos integrálközelítő összegek segítségével felírt approximációjából következik, hogy a polár-koordinátarendszerbe való áttéréskor, az (x,y) koordinátáknak az $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ változókkal való helyettesítésekor az integrandust az r számmal kell megszorozni, azaz a $(**)$ formula érvényes.