A nagy számok erős törvényének bizonyításában fontos szerepet játszik a következő

Kolmogorov egyenlőtlenség. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, (nem feltétlenül egyforma eloszlású) valószínűségi változók, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$, $S_k = \sum_{p=1}^{k} \xi_p$, $k = 1, \dots, n$. Ekkor*

$$P\left(\sup_{1\le k\le n} |S_k| \ge x\right) \le \frac{ES_n^2}{x^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}{x^2}$$

minden $x > 0$-ra.

Érdemes megjegyezni, hogy a Kolmogorov egyenlőtlenség ugyanazt a felső becslést adja annak valószínűségére, hogy az S_k részletösszegek szuprémuma nagyobb mint valamilyen $x > 0$ szám, mint amit a Csebisev egyenlőtlenség ad annak az eseménynek a valószínűségére, hogy az utolsó tag S_n nagyobb, mint x.

A Kolmogorov egyenlőtlenség bizonyítása. Definiáljuk a

$$\tau(\omega) = \min\{k\colon\ k \le n;\ |S_k(\omega)| \ge x\}$$

valószínűségi változót. ($\tau(\omega) = n$ ha $S_k(\omega) < x$ minden $k \le n$-re.) Azt állítjuk, hogy

$$ES_{\tau(\omega)}^2 \le ES_n^2\ . \tag{a}$$

Az utolsó egyenlőtlenség és a Csebisev egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\max_{k\le n} |S_k| > x\right) = P\left(|S_{\tau(\omega)}| > x\right) \le \frac{ES_{\tau(\omega)}^2}{x^2} \le \frac{ES_n^2}{x^2}\ ,$$

és ez a Kolmogorov egyenlőtlenség.

A kívánt egyenlőtlenség bebizonyításához vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} ES_n^2 - ES_{\tau(\omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{n} E(S_n - S_k)(S_n - S_k + 2S_k) I(\{\tau(\omega) = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} E(S_n - S_k)^2 I(\{\tau(\omega) = k\}) + 2\sum_{k=1}^{n} E(S_n - S_k) S_k I(\{\tau(\omega) = k\})\ . \end{aligned} \tag{b}$$

Mivel az $S_n - S_k$ és $S_k I(\{\tau(\omega) = k\})$ valószínűségi változók függetlenek, (az $S_n - S_k$ a ξ_l, $l = k+1, \dots, n$, az $S_k I(\{\tau(\omega) = k\})$ az ξ_l, $l = 1, \dots, k$ valószínűségi változóktól függ,) és $E(S_n - S_k) = 0$, ezért

$$E(S_n - S_k) S_k I(\{\tau(\omega) = k\}) = E(S_n - S_k) E S_k I(\{\tau(\omega) = k\}) = 0\ .$$

Innen következik, hogy az (b) azonosság jobboldalának a második tagja nulla. Mivel az első tag egy nem negatív valószínűségi változó várható értéke, ezért az (b) azonosságból következik az (a) reláció. Így bebizonyítottuk a Kolmogorov egyenlőtlenséget.

A Kolmogorov egyenlőtlenség bizonyítását azért vettem bele ebbe az előadássorozatba, hogy példát mutassak arra, hogy a véletlen játékokkal való foglalkozás és azok törvényszerűségeinek megértése komoly segítségéget jelent bizonyos fontos tisztán elméleti eredmények bizonyításában is. Durván szólva a Kolmogorov tétel bizonyításának fő gondolata az, hogy egy előnyös játékot nem érdemes túl korán befejezni.

Pontosabban fogalmazva, a Kolmogorov egyenlőtlenség bizonyításának hátterében a következő észrevétel áll. Tekintsünk egy olyan megállási szabályt, mely szerint már az n-ik lépés előtt egy k-ik lépésben megállunk, $1 \le k \le n$, ha a k-ik lépésben tekintett részletösszeg négyzete, azaz S_k^2 túllép egy bizonyos x^2 számot. Azt látjuk be, hogy az S_k részletösszeg négyzetének a várható értéke e megállási időpontban kisebb, mint akkor, ha megvárjuk az n-ik időpontot. Ezen állításnak a következő szemléletes magyarázata van. Ha olyan játékot játszunk, melynek k-ik lépése után a nyereményünk S_k^2, azaz a k-ik lépésben $S_k^2 - S_{k-1}^2$ összeget nyerünk, akkor ennek a játéknak minden lépésében várhatóan nyerünk. Ezért ez a játék előnyös, és nyereményünk várható értéke annál nagyobb minél tovább játszhatunk.

E gondolatmenet kiaknázásán alapul a valószínűségszámítás egyik fontos fejezete az úgynevezett martingalok elmélete. Ennek részleteire azonban nem térek ki.

Tekintsük a következő játékot. Feldobnak egy szabályos pénzdarabot egymástól függetlenül egymás után. Amennyiben a dobás eredménye fej, akkor a feltett tét dupláját kapjuk, ha írás, akkor a tét $\frac{2}{3}$ részét elveszítjük, és csak $\frac{1}{3}$ részét őrizhetjük meg. Mivel ez a játék előnyös, ezért feltesszük minden játékban minden pénzünket. Lássuk be, hogy amennyiben A volt a vagyonunk a játék kezdete előtt, és Z_n jelöli vagyonunkat az n-ik játék után, akkor

a) $EZ_n = A\left(\frac{7}{6}\right)^n$, *azaz vagyonunk várható értéke exponenciális gyorsan nő.*

b) Z_n *egy valószínűséggel tart nullához, ha* $n \to \infty$, *azaz ha sokáig játszunk, akkor egy valószínűséggel majdnem minden pénzünket elveszítjük.*

c) Értsük meg, hogy ez a két állítás nem mond egymásnak ellent.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = \dfrac{1}{3}$, ha a j-ik dobás eredménye írás. Ekkor $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független valószínűségi változók, $P(\xi_j = 2) = P\left(\xi_j = \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, és ezenkívül $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$. Ezért $E\xi_j = \dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{6}$, és $EZ_n = EA\xi_1\xi_2\cdots\xi_n = AE\xi_1 E\xi_2\cdots E\xi_n = A\left(\dfrac{7}{6}\right)^n$. Ez a feladat a) állítása.

A $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ relációból következik, hogy $\dfrac{1}{n}\log Z_n = \dfrac{\log A}{n} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n \log\xi_j$. Továbbá, $E\log\xi_j = \dfrac{1}{2}\left(\log 2 + \log\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$. Ezért a nagy számok (erős) törvénye szerint $\frac{1}{n}\log Z_n$ egy valószínűséggel konvergál a *negatív* $-\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ számhoz. Innen következik, hogy $Z_n \to 0$ egy valószínűséggel, és ez a feladat b) állítása.

Az a) rész bizonyítása azon alapult, hogy $E\xi_j > 1$, a b) részé pedig azon, hogy $E\log\xi_j < 0$. Ez a két egyenlőtlenség teljesülhet egyszerre, mert a várható érték és a logaritmus egymással nem felcserélhető. Igaz az $Ee^\eta \ge e^{E\eta}$ egyenlőtlenség (ez a konvex függvényekre vonatkozó úgynevezett Jensen egyenlőtlenség speciális esete), ahonnan $\xi = \log\eta$ választással $E\xi \ge e^{\log E\xi}$, de egyenlőség nem írható a fenti egyenlőtlenség helyett. Jegyezzük meg, hogy hasonló, de egyszerűbben érthető példát mutat a feladat a) és b) állításának egyszerre való teljesülésére a következő modell. Olyan játékot játszunk, melyben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elveszítjük, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig megháromszorozzuk a pénzünket. Az egyes játékok egymástól függetlenek, és minden időpontban minden pénzünket feltesszük. Ekkor annak a valószínűsége, hogy az n-ik játék után minden pénzünket elveszítjük, $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami rendkívül gyorsan tart egyhez, és pénzünk várható értéke $3^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami exponenciális gyorsan nő az n függvényében. Hasonló, csak kissé rejtettebb eset történik az általunk tárgyalt feladatban is. Tekintsük a feladatban tekintett játék nyereményét sok játék után. Azt állíthatjuk, hogy nagy n indexre az n-ik játék után nagy valószínűséggel alig marad pénzünk. Viszont kis valószínűséggel nagyon sok pénzt nyerünk, és ezért nyereményünk várható értéke nagy. Ez az oka annak, hogy nemcsak a b), hanem az a) állítás is teljesül.

Tekintsük az előző feladatban tekintett játékot azzal a különbséggel, hogy a játék minden egyes fordulójában vagyonunk u-ad részét, $0 \le u \le 1$, *tesszük fel tétként. Jelölje* $Z_n(u)$ *vagyonunkat a játék n-ik lépése után. Ekkor az* $\frac{1}{n}\log Z_n(u)$ *valószínűségi változók egy valószínűséggel konvergálnak egy* $B(u)$ *számhoz. Határozzuk meg a legjobb* $\bar u$ *számot, amelyikre* $B(\bar u) = \sup\limits_{0\le u\le 1} B(u)$. *Lássuk be, hogy* $B(\bar u) > 0$.

Tekintsük általánosabban a következő problémát. Olyan játékot játszhatunk, melyben az n-ik fordulóban A feltett tét esetén nyereményünk $A\xi_j$ *lesz, ahol* $\xi_1, \xi_2, \dots,$ *független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre* $E\xi_j > 1$. *Lássuk, be, hogy meg lehet adni olyan* $0 < u < 1$ *számot, melyre igaz, hogy amennyiben a játék minden lépésében vagyonunk u-szorosát tesszük fel, akkor vagyonunk egy valószínűséggel exponenciális sebességgel nőni fog.*

Megoldás: Vezessük be a $\xi_j = \xi_j(u)$, $j = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változókat, melyekre $\xi_j = 1 + u$, ha a j-ik dobás eredménye fej, és $\xi_j = \xi_j(u) = 1 - \frac{2u}{3}$, ha a j-ik dobás eredménye írás. Ekkor az n-ik lépésben a vagyonunk $Z_n = A\xi_1 \cdots \xi_n$, a ξ_j, $j = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak, ezért $\frac{1}{n}\log Z_n = \frac{\log A}{n} + \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\log\xi_j$, és a nagy számok (erős) törvénye szerint az $\frac{1}{n}\log Z_n$ valószínűségi változók egy valószínűséggel konvergálnak a

$$B(u) = E\log\xi_1 = \frac{1}{2}\left(\log(1+u) + \log\left(1 - \frac{2u}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\log(1+u)\left(1 - \frac{2u}{3}\right)$$

számhoz. A $B(u)$ függvény a maximumát az $\bar{u} = \frac{1}{4}$ helyen veszi fel, és $B(\bar{u}) = \frac{1}{2} \log \frac{25}{24} > 1$.

Az általános esetben tekintsük minden u, $0 \le u \le 1$ számra az $\eta_j(u) = (1-u)+u\xi_j$ valószínűségi változókat, $j = 1, 2, \dots$, és az $M(u) = E \log \eta_j(u) = E \log((1-u) + u\xi_j)$ várható értéket. Ha a játék minden lépésében vagyonunk u-ad részét tesszük fel, akkor n lépés után vagyonunk $Z_n = A\eta_1(u) \dots \eta_n(u)$ lesz. Megint a nagy számok (erős) törvényét alkalmazva kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n = E \log E\eta_1(u) = M(u)$. Azt kell tehát belátnunk, hogy az u alkalmas választásával elérhetjük, hogy $M(u) > 0$, ahol *szigorú* egyenlőtlenség teljesül.

Viszont $M(0) = 0$. Ezért elegendő azt belátni, hogy az $M(\cdot)$ függvény a nullában szigorúan nő, és ehhez elég azt megmutuatni, hogy az $M(u)$ függvény deriváltja a nullában pozitív. Viszont $\frac{dM(u)}{du} = E\frac{\xi_j - 1}{(1-u) + u\xi_j}$, ahonnan

$$\left.\frac{dM(u)}{du}\right|_{u=0} = E\xi_j - 1 > 0$$

az $E\xi_j > 1$ feltétel alapján.