

DOLGOZAT FELADATOK

Megjegyzés: Abban az esetben, ha egy megkérdezett fogalom definícióját több (egymással ekvivalens) módon lehet megadni, akkor ezek mindegyike jó válasznak minősül.

1. Legyen ξ_1 és ξ_2 két független, a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó azaz legyen ξ_j sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként, $j = 1, 2$. Számítsuk ki a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.
2. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye a $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ függvény. Számoljuk ki a ξ valószínűségi változó $E\xi^k$ momentumait minden $k = 1, 2, \dots$, pozitív egész számra.
3. Egy urnában 20 fehér és 30 piros golyó van. Elvégezzük 10 húzást egymás után úgy, hogy minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk és vele együtt bedobunk az urnába egy ugyanolyan színű golyót. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.
4. A következő játékot játszunk. Egy szabályos pénzdarabot feldobnak egymás után 10 000 alkalommal. Fejdobás esetében három forintot nyerünk, írás dobás esetében egy forintot veszítünk. Adjunk jó becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat alapján annak a valószínűségére, hogy nyereményünk összege 9 800 és 10 100 forint között lesz.
5. Mikor mondjuk, hogy egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn adott $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egymástól függetlenek?
6. Az alábbi négy állítás közül melyik helyes és melyik nem:
 - a.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
 - b.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
 - c.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}\xi + \text{Var}\eta$.
 - d.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}\xi + \text{Var}\eta$.