A április 17-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

Először néhány példát mutatunk a centrális határeloszlástétel alkalmazására.

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk 1200 alkalommal egymástól függetlenül, és összeadjuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 2280 és 2500 közé esik.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 1200$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5. Ekkor a $P\left(2280 \le \sum\limits_{j=1}^{1200} \xi_j \le 2500\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Vegyük észre, hogy $E\xi_j = \frac{1}{6}(2+4+6) = 2$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{6}(4+16+36) - 4 = \frac{16}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(2280 \le \sum_{j=1}^{1200} \xi_j \le 2500\right) = P\left(\frac{-120}{\sqrt{1200\frac{16}{3}}} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{1200} \xi_j - \sum\limits_{j=1}^{1200} E\xi_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{1200} \operatorname{Var}\xi_j}} \le \frac{100}{\sqrt{1200\frac{16}{3}}}\right)$$
$$\sim \Phi(1.25) - \Phi(-1.5) = 0.8944 + 0.9322 - 1 = 0.8266.$$

2. Egy szabályos dobókockát és egy szabályos érmét feldobunk 3300 alkalommal egymástól függetlenül. (Az érme és kockadobások eredményei is függetlenek egymástól.) Ha a kockadobás eredménye páros és az érme a fej oldalra esett, akkor annyi forintot nyerünk, amennyi a kockadobás eredménye. Ha az érme az írás oldalra esett vagy a kockadobás eredménye páratlan szám, akkor nem nyerünk, és nem is vesztünk semmit. Mi a valószínűsége annak, hogy az össznyereményünk 3190 és 3520 forint közé esik? Adjunk erre jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, és η_j $1 \le j \le 3300$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik kockadobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik kockadobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik kockadobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik kockadobás eredménye 1, 3 vagy 5. Legyen $\eta_j = 1$, ha a j-ik érmedobás eredménye fej, és $\eta_j = 0$, ha a j-ik érmedobás írás. Legyen $\zeta_j = \xi_j\eta_j$. Ekkor a j-ik dobásnál a nyereményünk ζ_j lesz, $1 \le j \le 3300$, és a $P\left(3190 \le \sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Ennek érdekében számoljuk ki a független ζ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. $E\zeta_j = E\xi_j\eta_j = E\xi_j E\eta_j = \frac{1}{6}(2+4+6)\frac{1}{2} = 1$, $E\zeta_j^2 = E\xi_j^2 E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(4+16+36)\cdot\frac{1}{2} = \frac{14}{3}$, $\operatorname{Var}\zeta_j^2 = E\zeta_j^2 - (E\zeta_j)^2 = \frac{11}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(3190 \le \sum_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right) = P\left(\frac{-110}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j - \sum\limits_{j=1}^{3300} E\zeta_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{3300} \operatorname{Var}\xi_j}} \le \frac{220}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}}\right)$$

$$\sim \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.9285.$$

3. Vegyünk egy olyan pénzdarabot, mely $\frac{2}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel az írás oldalra. Ezt a pénzdarabot annyiszor dobjuk fel, ameddig megjelenik 1200 fej dobás. Mi annak a valószínűsége, hogy az elvégzett dobások száma 1680 1830 küzé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést.

   Megoldás: Az elvégzett dobások száma egy η negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 1200$ és $p = \frac{2}{3}$ paraméterekkel, azaz $P(\eta = k + n) = \binom{n+k-1}{n-1}(1-p)^k p^n$, $p = \frac{2}{3}$, és $n = 1200$ paraméterrel. Egy ilyen valószínűségi változónak ki lehet számolni a pontos eloszlását, azaz azt, hogy milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel. Elvileg, ez lehetőséget ad a kívánt valószínűség kiszámítására egy bonyolult összeg kiszámításának a segítségével. Ennél hasznosabb becslést tudunk kapni a következő érvelés segítségével, mely a kívánt valószínűséget jó pontossággal kiszámítja a centrális határeloszlástétel segítségével.

   Jelölje ξ_j, $2 \le j \le 1200$, a $j-1$-ik és j-ik fejdobás közötti dobások számát (a j-ik fejdobást beleszámítjuk a $j-1$-iket viszont nem számítjuk bele e dobások közé), és legyen ξ_1 az első fejdobásig (ezt is beleszámítva) elvégzett dobások száma. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, negatív binomiális eloszlásúak $n = 1$, $p = \frac{2}{3}$ paraméterekkel, és minket a $P(1680 < \xi_1 + \cdots + \xi_{1200} < 1830)$ valószínűség érdekel. Megmutattuk a 6. előadásban, illetve a hozzátartozó feladatokban), hogy $E\xi_j = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1-p}{p^2} = \frac{3}{4}$. Ezért a centrális határeloszlástétel alapján $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{1200}$ jelöléssel minket a $P\left(-4 < \frac{\eta - 1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}} < 1\right)$ valószínűség érdekel. A centrális határeloszlástétel alapján $P\left(-4 < \frac{\eta - 1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}} < 1\right) \sim \Phi(1) + \Phi(4) - 1 \sim \Phi(1)$.

4. Legyen birtokunkban 100 lámpa, melyek mindegyike egymástól független időtartamig működik, élettartamuk pedig exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (A lámpák élettartamának exponenciális eloszlása természetes feltételezés.) Egy termet bevilágítunk ezen lámpák valamelyikével, majd amikor az kiégett új lámpát használunk fel. Adjunk jó becslést arra, hogy a lámpák összélettartama legalább 1150 óra.

Megoldás: Jelölje ξ_j a j-ik lámpa élettartamát, $1 \le j \le 100$. Ekkor a $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150)$ valószínűségre kell jó becslést adnunk, ahol az összegben független exponenciális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. Vezessük be az $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$ jelölést.

Kiszámoltuk, hogy jelen esetben $E\eta = mE\xi_1 = \dfrac{m}{\lambda} = 1000$, $\operatorname{Var}\eta = \dfrac{m}{\lambda^2} = 10000$ ($m = 100$ és $\lambda = \dfrac{1}{10}$ választással). Ezért a centrális határeloszlástétel szerint $\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} = \dfrac{\eta - 1000}{100}$ jó közelítéssel standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150) = P\left(\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} > 1.5\right) \sim 1 - \Phi(1.5)$.

5. Egy pénzdarabról ellenőrizni akarjuk, hogy igaz-e az a hipotézis, mely szerint ez az érme legalább $\frac{3}{4}$ valószínűséggel esik a fej és legfeljebb $\frac{1}{4}$ valószínűséggel az írás oldalára. Ennek érdekében feldobjuk a pénzdarabot 30 000 alkalommal, és a következő döntési szabályt hozzuk. Választunk egy k számot, és akkor fogadjuk el a hipotézist helyesnek, ha legalább k fejdobás történt. Legalább mekkorának kell válassztanunk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy egy a hipotézist teljesítő pénzdarab esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy a hipotézis teljesül?

Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 30\,000$, $S = S_{30000} = \sum\limits_{j=1}^{30\,000} \xi_j$. Ha a fejdobás eredményének valószínűsége pontosan $\dfrac{3}{4}$, $E\xi_j = \dfrac{3}{4}$, $E\xi_j^2 = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \dfrac{3}{16}$, $ES = 30\,000 E\xi_j = 22\,500$, $\operatorname{Var} S = 30\,000 \operatorname{Var}\xi_j = 5625 = 75^2$. Innen és a centrális határeloszlástételből,

$$\begin{aligned} P(S > k) &= P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} > \frac{k - 22\,500}{75}\right) = 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{k - 22\,500}{75}\right) \\ &\sim 1 - \Phi\left(\frac{k - 22\,500}{75}\right). \end{aligned}$$

Válasszuk a k számot úgy, hogy a fenti valószínűség körülbelül 0.9 legyen. Ekkor a $\Phi\left(\dfrac{k - 22\,500}{75}\right) = 0.1$ vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Phi\left(\dfrac{22\,500 - k}{75}\right) = 0.9$ egyenletet kell kielégítenünk. A normális eloszlás-táblázat alapján $\dfrac{22\,500 - k}{75} \sim 1.28$, ami azt jelenti, hogy $k = 22\,500 - 75 \times 1.28$ és $p = \dfrac{3}{4}$ esetén annak valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $k = 22\,500 - 75 \times 1.28 = 22\,212$ és $p = \dfrac{3}{4}$ esetében annak valószínűsége, hogy legalább ennyi fejdobás történik körülbelül 0.9. Ha $p \ge \dfrac{3}{4}$, akkor ez a valószínűség nagyobb. Ezért a $k = 22\,212$ helyes választás.

Házi feladat.

Egy szabályos dobókockát feldobunk 2700 alkalommal egymástól függetlenül, és összeszámoljuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 420 és 720 közé esik.

6. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, és legyen t valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.
Megoldás:

$$
\begin{aligned}
Ee^{t\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tu-u^2/2-t^2/2+t^2/2}\, du \\
&= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-u)^2/2}\, du = e^{t^2/2}.
\end{aligned}
$$

7. Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó.
Megoldás: $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$, ha $x \geq 0$. Írjuk fel ξ^2 sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$, ha $x \geq 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$
\begin{aligned}
f(x) = g * g(x) &= \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2}\, du \\
&= e^{-x/2} \int_0^1 \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\, dv = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \quad \text{ha } x \geq 0,
\end{aligned}
$$

és $f(x) = 0$, ha $x \leq 0$.

Megjegyzés: Az x paramétertől nem függő $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\, dv$ integrál értékét meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény, ezért integrálja a számegyenesen eggyel egyenlő. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Hogyan? Vagyük észre, hogy

$$
\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (v - \frac{1}{2})^2}}.
$$

8. Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\frac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

A megoldás kidolgozása előtt tegyünk először egy általános megjegyzést. Ha adva van két valószínűségi változó ξ és η, melyek (együttes) sűrűségfüggvénye egy ismert $f(u,v)$ sűrűségfüggvény, akkor az $\dfrac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlásfüggvényét a következő módon számolhatjuk ki: Vezessük be a $g(u,v)=g_x(u,v)$ függvényt, mely a síkon az $\left\{(u,v)\colon \dfrac{v}{u}<x\right\}$ halmaz indikátorfüggvénye, azaz $g(u,v)=1$, ha $\dfrac{v}{u}<x$, és $g(u,v)=0$, ha $\dfrac{v}{u}\ge x$. Ekkor $P\left(\dfrac{\eta}{\xi}<x\right)=Eg(\xi,\eta)=\int\int g(u,v)f(u,v)\,du\,dv=\int\int_{\{(u,v)\colon\, \frac{v}{u}<x\}} f(u,v)\,du\,dv$. Látni fogjuk, hogy az ebben a feladatban vizsgálandó integrál viszonylag egyszerű, könnyebben kezelhető.

Megoldás. A feladatben vizsgálandó hányados eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned}F(x)=P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=\iint_{v<xu}\frac{1}{2\pi}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv\\&=2\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\arctan x}\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan x}d\varphi=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x.\end{aligned}$$

Ebben a számolásban a felírt integrált átírtuk $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$ transzformációval polárkoordinátarendszerben. E számolás során az integrandusban megjelenik az r Jacobian mint szorzó faktor. Ezután azt vegyük észre, hogy a belső r változó szerinti integrál $\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr=\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty=1$.
Kiszámoltuk a keresett valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. E valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az eloszlásfüggvény deriváltja, azaz az $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ függvény.

Második megoldás. A (ξ,η) vektor sűrűségfüggvénye $\dfrac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen következik, hogy annak valószínűsége, hogy a (ξ,η) vektor egy origóból kiinduló α szögű szögtartományba esik, $\dfrac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=P\left((\xi,\eta)\in\left[-\frac{\pi}{2},\arctan x\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\arctan x+\pi\right)\text{ szögtartományban}\right)\\&=\frac{1}{2\pi}2\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x.\end{aligned}$$

9. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumban, azaz legyen $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x)=1$, ha $0\le x\le 1$, $f(x)=0$ egyébként. Számítsuk ki a ξ^2 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
Első megoldás: $\operatorname{Var}\xi^2=E\left(\left(\xi^2\right)^2\right)-\left(E\xi^2\right)^2=E\xi^4-\left(E\xi^2\right)^2=\int x^4f(x)\,dx-\left(\int x^2f(x)\,dx\right)^2$, ahol $f(x)=1$, ha $0\le x\le 1$, $f(x)=0$ egyébként, azaz $f(x)$ a ξ

valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Innen $E\xi^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \dfrac{1}{3}$, és $\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^4\,dx - \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)^2 = \dfrac{1}{5} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{45}$.

Második megoldás: Számítsuk ki először a ξ^2 valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét. A ξ^2 valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = P(0 \le \xi \le \sqrt{x}) = \sqrt{x}, \quad \text{ha } 0 \le x \le 1,$$

$F(x) = 0$, ha $\xi < 0$, $F(x) = 1$, ha $x > 1$. Innen a ξ^2 valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Ezért

$$E\xi^2 = \int_0^1 x \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

és

$$\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx - \left(\int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}.$$