A április 23-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\dfrac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

   A megoldás kidolgozása előtt tegyünk először egy általános megjegyzést. Ha adva van két valószínűségi változó ξ és η, melyek (együttes) sűrűségfüggvénye egy ismert $f(u,v)$ sűrűségfüggvény, akkor az $\dfrac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlásfüggvényét a következő módon számolhatjuk ki: Vezessük be a $g(u,v)=g_x(u,v)$ függvényt, mely a síkon az $\left\{(u,v)\colon \dfrac{v}{u}<x\right\}$ halmaz indikátorfüggvénye, azaz $g(u,v)=1$, ha $\dfrac{v}{u}<x$, és $g(u,v)=0$, ha $\dfrac{v}{u}\ge x$. Ekkor $P\left(\dfrac{\eta}{\xi}<x\right)=Eg(\xi,\eta)=\int\int g(u,v)f(u,v)\,du\,dv=\int\int_{\{(u,v)\colon\, \frac{v}{u}<x\}} f(u,v)\,du\,dv$. Látni fogjuk, hogy az ebben a feladatban vizsgálandó integrál viszonylag egyszerű, könnyebben kezelhető.

   Megoldás. A feladatben vizsgálandó hányados eloszlásfüggvénye

   $$\begin{aligned}F(x)=P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=\iint_{v<xu}\frac{1}{2\pi}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv\\&=2\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\arctan x}\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan x}d\varphi=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x.\end{aligned}$$

   Ebben a számolásban a felírt integrált átírtuk $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$ transzformációval polárkoordinátarendszerben. E számolás során az integrandusban megjelenik az r Jacobian mint szorzó faktor. Ezután azt vegyük észre, hogy a belső r változó szerinti integrál $\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr=\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty=1$.
   Kiszámoltuk a keresett valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. E valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az eloszlásfüggvény deriváltja, azaz az $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ függvény.

   Második megoldás. A (ξ,η) vektor sűrűségfüggvénye $\dfrac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen következik, hogy annak valószínűsége, hogy a (ξ,η) vektor egy origóból kiinduló α szögű szögtartományba esik, $\dfrac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

   $$\begin{aligned}P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=P\left((\xi,\eta)\in\left[-\frac{\pi}{2},\arctan x\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\arctan x+\pi\right)\text{ szögtartományban}\right)\\&=\frac{1}{2\pi}2\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x.\end{aligned}$$

2. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumban, azaz legyen $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x)=1$, ha $0\le x\le 1$, $f(x)=0$ egyébként. Számítsuk ki a ξ^2 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Első megoldás: $\operatorname{Var}\xi^2 = E\left(\left(\xi^2\right)^2\right) - \left(E\xi^2\right)^2 = E\xi^4 - \left(E\xi^2\right)^2 = \int x^4 f(x)\,dx - \left(\int x^2 f(x)\,dx\right)^2$, ahol $f(x)=1$, ha $0\le x\le 1$, $f(x)=0$ egyébként, azaz $f(x)$ a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Innen $E\xi^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, és $\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^4\,dx - \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$.

Második megoldás: Számítsuk ki először a ξ^2 valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét. A ξ^2 valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = P(0 \le \xi \le \sqrt{x}) = \sqrt{x}, \quad \text{ha } 0 \le x \le 1,$$

$F(x)=0$, ha $\xi<0$, $F(x)=1$, ha $x>1$. Innen a ξ^2 valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ha $0\le x\le 1$, és $f(x)=0$ egyébként. Ezért

$$E\xi^2 = \int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

és

$$\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx - \left(\int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}.$$

3. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, melyek közül ξ Poisson eloszlású λ paraméterrel, azaz $P(\xi=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ minden $k=0,1,2,\dots$ számra, η egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, azaz létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, melyre $f(u) = 1$, ha $0\le u\le 1$, és $f(u)=0$, ha $u>1$, vagy $u<0$. Lássuk be, hogy a $\xi+\eta$ valószínűségi változónak is van sűrűségfüggvénye, és határozzuk meg azt.
   Megoldás: Legyen $[a,b]$ egy olyan intervallum, melyre $[a,b]\subset[n,n+1]$ valamely nem negatív egész n számra. Ekkor

$$\begin{aligned} P(\xi+\eta\in[a,b]) &= P(\xi=n,\eta\in[a-n,b-n]) = P(\xi=n)P(\eta\in[a-n,b-n]) \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}(b-a) = \int_a^b f(u)\,du, \end{aligned}$$

   ahol $f(u) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, ha $u\in[n,n+1]$, $n=0,1,2,\dots$. Legyen továbbá $f(u)=0$, ha $u\le 0$. Ebből a relációból, illetve abból a tényből, hogy $P(\xi+\eta\le 0)=0$, következik, hogy $P(\xi+\eta<x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ a fent definiált $f(\cdot)$ függvénnyel, tehát ez a $\xi+\eta$ valószínűségi változó (létező) sűrűségfüggvénye.
4. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, melyek közül ξ Poisson eloszlású λ paraméterrel, azaz $P(\xi=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ minden $k=0,1,2,\dots$ számra, η egyenletes eloszlású a $[0,2]$ intervallumon, azaz létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, melyre $f(u) =$

$\frac{1}{2}$, ha $0 \le u \le 2$, és $f(u) = 0$, ha $u > 2$, vagy $u < 0$. Lássuk be, hogy a $\xi + \eta$ valószínűségi változónak is van sűrűségfüggvénye, és határozzuk meg azt.

Megoldás: Ennek a feladatnak a megoldása hasonló az előzőhöz. Legyen $[a, b]$ egy olyan intervallum, melyre $[a, b] \subset [n, n+1]$ valamely nem negatív egész n számra. Ekkor, ha $n \ge 1$, akkor

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta \in [a, b]) &= P(\xi = n, \eta \in [a-n, b-n]) \\ &\quad + P(\xi = n-1, \eta \in [a-n-1, b-n-1]) \\ &= P(\xi = n)P(\eta \in [a-n, b-n]) \\ &\quad + P(\xi = n-1)P(\eta \in [a-n-1, b-n-1]) \\ &= \left(\frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-\lambda}(b-a) = \int_a^b f(u)\, du, \end{aligned}$$

ahol $f(u) = \left(\frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-\lambda}$, ha $u \in [n, n+1]$, $n = 1, 2, \dots$. Hasonlóan,

$$P(\xi + \eta \in [a, b]) = \int_a^b P(\xi = 0)\, du = \int_a^b e^{-\lambda}\, du$$

ha $[a, b] \in= 0, 1]$, továbbá $P(\xi + \eta \le 0) = 0$. Innen következik, hogy ha az $f(\cdot)$ függvény definicióját az $f(u) = e^{-\lambda}$, ha $0 \le u \le 1$, $f(u) = 0$, ha $u < 0$ képletekkel fejezzük be, akkor $P(\xi+\eta < x) = \int_{-\infty}^x f(u)\, du$ ezzel az $f(\cdot)$ függvénnyel. Tehát ez a $\xi + \eta$ valószínűségi változó (létező) sűrűségfüggvénye a fent definiált $f(\cdot)$ függvény.

5. Legyen birtokunkban 100 lámpa, melyek mindegyike egymástól független időtartamig működik, élettartamuk pedig exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (A lámpák élettartamának exponenciális eloszlása természetes feltételezés.) Egy termet bevilágítunk ezen lámpák valamelyikével, majd amikor az kiégett új lámpát használunk fel. Adjunk jó becslést arra, hogy a lámpák összélettartama legalább 1150 óra.

   Megoldás: Jelölje ξ_j a j-ik lámpa éléttartamát, $1 \le j \le 100$. Ekkor a $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150)$ valószínűségre kell jó becslést adnunk, ahol az összegben független exponenciális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. Vezessük be az $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$ jelölést.

   Kiszámoltuk, hogy jelen esetben $E\eta = mE\xi_1 = \frac{m}{\lambda} = 1000$, $\operatorname{Var}\eta = \frac{m}{\lambda^2} = 10000$ ($m = 100$ és $\lambda = \frac{1}{10}$ választással). Ezért a centrális határeloszlástétel szerint $\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} = \frac{\eta - 1000}{100}$ jó közelítéssel standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150) = P\left(\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} > 1.5\right) \sim 1 - \Phi(1.5)$.

6. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Számítsuk ki a $\xi^2 + \xi_4$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Számítsuk ki először $\xi^2+\xi^4$ $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Ha $x<0$, akkor $G(x)=0$, mert $\xi^2+\xi^4\ge 0$ egy valószínűséggel. Ha $x>0$, akkor a $P(\xi^2+\xi^4<x)$ valószínűségét kell kiszámítanunk. Legyen $u=u(x)$ az $u^2+u-x=0$ egyenlet nagyobb gyöke, aza $u=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$. Nem nehéz belátni, hogy $\xi^2(\omega)+\xi^4(\omega)<x$ akkor és csak akkor, ha $0\le<\xi^2(\omega)<u(x)$, ami azt jelenti, hogy $-\sqrt{u(x)}<x<\sqrt{u(x)}$. Innen $\xi^2+\xi^4$ eloszlásfüggvénye $x>0$ esetén $G(x)=\Phi\left(\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right)=2\Phi\left(\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right)-1$, ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény. Innen differenciálással kapjuk, hogy $\xi^2+\xi^4$ sűrűségfüggvénye $\dfrac{dG(x)}{dx}$, ahonnan ez a sűrűségfüggvény nulla, ha $x<0$, és $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\exp\left\{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{4}\right\}\dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}$, ha $x>0$.

A következő két feladat célja annak az alaptételnek nevezett tétel feltételeinek jobb megértése, mely megadja a kapcsolatot az eloszlásfüggvények illetve azok karakterisztikus függvénye konvergenciája közötti kapcsolatot.

Ezenkívül, ha marad rá idő meg lehet tárgyalni egy ennek a feladatsornak a végén megfogalmazott állítás bizonyítását, mely megmagyarázza mi a jelentősége az alaptételben annak a feltételnek, hogy a karakterisztikus függvények egy a nullában folytonos függvényhez konvergálnak. Egyébként ennek az állításnak a bizonyítása az alaptétel bizonyításának egyik kulcslépése.

7. Mutassuk meg, hogy egy F eloszlásfüggvény $\varphi(t)=\int e^{itu}F(\,du)$ karakterisztikus függvénye folytonos minden pontban.

   Megoldás: Jelölje $\varphi(t)=\int e^{itu}F(\,du)$ az F eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét. Ekkor tetszőleges t, δ illetve $K>0$ számra teljesül a

$$|\varphi(t+\delta)-\varphi(t)|\le\int|e^{i(t+\delta)}-e^{it}|F(\,du)\le\int_{u\colon\,|u|\le K}\sup_{t\colon\,|t|\le K}|e^{i(t+\delta)}-e^{it}|F(\,du)$$
$$+\int_{u\colon\,|u|>K}2F(\,du)\le\sup_{t\colon\,|t|\le K}|e^{i\delta t}-1|+F(-K)+(1-F(K))$$

   egyenlőtlenség. Tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz választhatunk olyan $K=K(\varepsilon)$ számot, melyre $F(-K)+(1-F(K))\le\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ezután elég kis $\delta_0=\delta_0(\varepsilon,K,t)>0$ választással elérhetjük, hogy $\sup\limits_{t\colon\,|t|\le K}|e^{i\delta t}-1|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$, ha $\delta\le\delta_0$. Innen következik, hogy $|\varphi(t+\delta)-\varphi(t)|\le\varepsilon$, ha $\delta<\delta_0$, azaz a $\varphi(\cdot)$ függvény folytonos.

8. Legyen $F_n(\cdot)$, $n=1,2\dots,$ a $[-n,n]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, azaz legyen $F_n(\cdot)$ sűrűségfüggvénye az $f_n(u)=\dfrac{1}{2n}$, ha $-n\le u\le n$, $f_n(u)=0$, ha $|u|>n$ képlet segítségével megadott függvény. Lássuk be, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei minden pontban konvergálnak az $\varphi(0)=1$, $\varphi(t)=0$, ha $t\ne0$ képlettel megadott $\varphi(t)$ függvényhez,

amelyik az origóban nem folytonos. Továbbá az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban, mert minden véges $[a,b]$ intervallumra

$$\lim_{n\to\infty}[F_n(b)-F_n(a)]=0.$$

Megoldás: Az F_n eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n}e^{itu}\,du=\frac{e^{itn}-e^{-itn}}{2nit},$$

ahonnan $\varphi_n(t)\le\dfrac{1}{|t|n}$. Innen $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=0$, ha $t\ne 0$. Másrészt, $\varphi_n(0)=1$ minden n-re tehát, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(0)=1$. Másrészt egy véges $[a,b]$ intervallumra az $F_n(b)-F_n(a)=\dfrac{b-a}{n}$, ha $n\le\max(|a|,|b|)$. ahonnan $\lim\limits_{n\to\infty}[F_n(b)-F_n(a)]=0$. Ez azt jelenti, hogy az F_n eloszlások „kifolynak a végtelenbe”, és ezért nincs határeloszlásuk.

9. Mutassuk meg, a karakterisztikus függvények segítségével, hogy amennyiben ξ és η két független, normális eloszlású valószínűségi változó m_1 és m_2 várható értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel, akkor $\xi+\eta$ normális eloszlású valószínűségi változó m_1+m_2 várható értékkel, és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzettel.

   Megoldás: Tudjuk, hogy a karakteresztikus függvények egyértelműen meghatározzák azt az eloszlásfüggvényt, melynek ők a karakterisztikus függvényük. Ezért elég belátni, hogy a $\xi+\eta$ karakterisztikus függvénye megegyezik az m_1+m_2 várható értékkel és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzettel rendelkező normális eloszlás karakterisztikus függvényével. Viszont tudjuk egyrészt, hogy a ξ és η valószínűségi változók függetlensége miatt $Ee^{it(\xi+\eta)}=Ee^{it\xi}Ee^{it\eta}$, másrészt mivel a standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye $\varphi(t)=e^{-t^2/2}$, ezért $Ee^{it\xi}=e^{itm_1}e^{-\sigma_1^2t^2/2}$, és $Ee^{it\eta}=e^{itm_2}e^{-\sigma_2^2t^2/2}$. Innen $Ee^{it(\xi+\eta)}=e^{it(m_1+m_2)}e^{-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}$, ahonnan következik a feladat állítása.

10. Legyen $F_n(\cdot)$, $n=1,2,\dots$, eloszlásfüggvények egy sorozata, melyek $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvényei az origó egy kis környezetében konvergálnak egy a nullában folytonos függvényhez.

    a.) Lássuk be (a Lebesgue tétel segítségével), hogy ekkor tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta=\delta(\varepsilon)$ szám, melyre $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{Re}\,[1-\varphi_n(t)]\,dt\le\varepsilon$, ahol $\mathrm{Re}\,z$ a z szám reális részét jelöli.

    b.) Mutassuk meg, hogy amennyiben $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvényei teljesítik az a) részben megfogalmazott tulajdonságot, akkor minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $K=K(\varepsilon)$ szám, melyre $F_n(-K)+(1-F_n(K))\le\varepsilon$ minden $n=1,2,\dots$ számra.

    Megjegyzés: A b.) részben megfogalmazott tulajdonság teljesülését egyenletes feszességnek hívják az irodalomban. Ez fontos szerepet játszik számos vizsgálatban.

Megoldás: Legyen $\varphi(\cdot)$ a $\varphi_n(\cdot)$ függvények (egy véges intervallumban létező) limesze. Mivel ez a függvény az origóban folytonos $0 \le \operatorname{Re}\varphi(t) \le 1$ minden t indexre, ahol a $\varphi(\cdot)$ létezik, $\operatorname{Re}[1-\varphi(0)] = 0$, és ez a függvény az origóban folytonos, ezért $\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}[1-\varphi(t)]\,dt \le \varepsilon$, ha a $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ számot elég kicsinek választjuk. Mivel $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}[1-\varphi_n(t)] = \operatorname{Re}[1-\varphi(t)]$, és $0 \le \operatorname{Re}[1-\varphi_n(t)] \le 2$, alkalmazhatjuk a Lebesgue tételt, és ez megadja az a) rész állításának bizonyítását.
A b) rész bizonyításához használjuk fel, hogy az a) rész teljesülése esetén minden $\varepsilon > 0$ számhoz választhatunk olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$ számot és $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbindexet, melyre igaz, hogy $0 \le \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}[1-\varphi_n(t)]\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n \ge n_0$. Másrészt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}[1-\varphi_n(t)]\,dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty} [1-\cos tx]\; dF_n(x)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} [1-\cos tx]\,dt\,dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{t}{2\delta} - \frac{\sin tx}{2\delta x}\right]_{t=-\delta}^{t=\delta} dF_n(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin\delta x}{\delta x}\right) dF_n(x) = \int_{-K}^{K} \left(1 - \frac{\sin\delta x}{\delta x}\right) dF_n(x) \\
&\quad + \int_{|x|>K} \left(1 - \frac{\sin\delta x}{\delta x}\right) dF_n(x)
\end{aligned}$$

tetszőleges $K > 0$ számra. Továbbá $1 - \frac{\sin\delta x}{\delta x} \ge 0$ minden x számra, és $1 - \frac{\sin\delta x}{\delta x} \ge \frac{1}{2}$, ha $x \ge \frac{2}{\delta}$. Innen kapjuk $K = \frac{2}{\delta}$ választással, hogy

$$\frac{\varepsilon}{2} \ge \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}[1-\varphi_n(t)]\,dt \ge \int_{|x|>K} \frac{1}{2}\,dF_n(x),$$

azaz $F_n(-K) + (1 - F_n(K)) \le \varepsilon$, ha $n \ge n_0$. Nem nehéz belátni, hogy a K index esetleges növelésével elérhető, hogy ez az egyenlőtlenség a maradék véges sok $1 \le n \le n_0$ indexre is teljesüljön.