Az április 2-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai[1]

Feladatok:

1.* Általános valószínűségi változók esetében is érvényes a

$$\inf_{-\infty<M<\infty} E(\xi-M)^2 = \operatorname{Var}\xi$$

azonosság.

Megoldás: A diszkrét valószínűségi változók esetéhez hasonlóan érvelhetünk.

$$E(\xi-M)^2 = E(\xi - E\xi + (E\xi_M))^2 = E(\xi-E\xi)^2 + (E\xi-M)^2 \ge \operatorname{Var}\xi,$$

és $M = E\xi$ esetében azonosság érvényes.

2. Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $\eta = a\xi + b$ és $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi < \dfrac{x-b}{a}\right) = F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ függvény, ha $a > 0$, és $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi > \dfrac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$, ha $a < 0$. Innen η sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{dG(x)}{dx} = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

A $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$G(x) = P(\xi^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right),$$

ha $x \ge 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen deriválással ζ sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right)$.

Házi feladat:

Legyen egy ξ valószínűségi változónak $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Számítsuk ki ξ^3 és ξ^4 sűrűségfüggvényét.

3. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, m, σ valós számok, akkor az $\sigma\xi + m$ valószínűségi változó várható értéke m szórásnégyzete σ^2, sűrűségfüggvénye pedig $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}|\sigma|} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

Megoldás: $E(\sigma\xi + m) = \sigma E\xi + m = m$, és $\operatorname{Var}(\sigma\xi + m) = \sigma^2 \operatorname{Var}\xi = \sigma^2$. Továbbá, az előző feladat eredménye alapján a $\sigma\xi + m$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

[1] Időhiány miatt bizonyos feladatok tárgyalását el kell hagyni. *-gal jelöltem azokat, melyeket elsősorban elhagynék.

az $f(x) = \dfrac{1}{|\sigma|}\varphi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$, ahol $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, a standard normális sűrűségfüggvény. Innen következik a feladat állítása.

4. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor$E\xi^{2k-1} = 0$, $E\xi^{2k} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ minden $k = 1, 2, \ldots$ számra.
   Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait.
   Megoldás:
   $$E\xi^{2k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = 0,$$
   mert az integrandus páratlan függvény. Másrészt parciális integrálással $f(x) = x^{2k-1}$ és $g(x) = x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)$ kapjuk, hogy
   $$\begin{aligned} E\xi^{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1)x^{2k-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx \\ &= (2k-1)E\xi^{2k-2}. \end{aligned}$$
   Innen k szerinti indukcióval kapjuk a feladat második állítását.

   Házi feladat:

   Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait, azaz egy olyam valószínűségi változó momentumait adjuk meg, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$.

5. Mutassuk meg, hogy egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:
   $$P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > x)$$
   minden $x \geq 0$ és $y \geq 0$ számra.
   Megoldás: Mivel $P(\xi > u) = e^{-\lambda u}$ minden $u \geq 0$ számra, ezért $P(\xi > x + y | \xi > y) = \dfrac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\xi > x)$.

   Nem kötelező házi feladat:

   Ha egy ξ valószínűségi változó teljesűti az örökifjú tulajdonságot, akkor az exponenciális eloszlású.

   Segítség: Azt kell belátni, hogy amennyiben $P(\xi > x + y) = P(\xi > x)P(\xi > y)$ minden $x \geq 0$ és $y \geq 0$ számra, akkor $P(\xi > x) = e^{-\lambda x}$ minden $x \geq 0$ számra. Legyen $P(\xi > x) = e^{-\lambda(x)x}$ valamely $x > 0$ számra. Lássuk be először az $y = \frac{p}{q}x$ alakú számokra, ahol p és q pozitív egész számok, hogy $P(\xi > y) = e^{-\lambda(x)y}$. Végül, mivel $P(\xi > x)$ monoton csökkenő függvény, ezért $\lambda(x) = \lambda$.

6. Mutassuk meg, hogy létezik olyan ξ valószínűségi változó teljesíti a következő szuper örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y | \xi > y) > P(\xi > x)$$

minden $x > 0$ és $y > 0$ számra.

Megoldás: Legyen a ξ valószínűségi változó olyan, hogy $P(\xi > x) = e^{-\sqrt{x}}$, ha $x \geq 0$ és $P(\xi > x) = 1$, ha $x < 0$. Ekkor $P(\xi > x + y | x > y) = e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}$, ha $x > 0$, $y > 0$. Ezért elég megmuatatni, hogy $e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} > e^{-\sqrt{y}}$, illetve hogy $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ha $x > 0$ és $y > 0$. Ez az egyenlőtlenség viszont (négyzetre emelés után) könnyen látható.

7. Legyen egy (ξ_1, ξ_2) véletlen vektor eloszlása az $F(x_1, x_2) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2)$ függvény, $-\infty < a_1 < b_1 < \infty$, $-\infty < a_2 < b_2 < \infty$ valós számok. Fejezzük ki az $F(x_1, x_2)$ eloszlásfüggvény segítségével a $P(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2)$, $P(a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2)$ és $P(a_1 < \xi_1 < b_1, a_2 < \xi_2 < b_2)$ valószínűségeket.

Megoldás: Először azt megmutatjuk meg, hogy $P(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$. Valóban, $F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) = P(\xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2)$, és $F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2) = P(\xi_1 < a_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2)$. Ezt a két azonosságot kivonva egymásból megkapjuk a kívánt állítást.

$$\begin{aligned}
P(a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2) &= \lim_{n\to\infty} P\left(a_1 \leq \xi_1 < b_1 + \frac{1}{n}, a_2 \leq \xi_2 < b_2 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(F\left(b_1 + \frac{1}{n}, b_2 + \frac{1}{n}\right) - F\left(b_1 + \frac{1}{n}, a_2\right) - F\left(a_1, b_2 + \frac{1}{n}\right) + F(a_1, a_2)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} F\left(b_1 + \frac{1}{n}, b_2 + \frac{1}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} F\left(b_1 + \frac{1}{n}, a_2\right) \\
&\qquad - \lim_{n\to\infty} F\left(a_1, b_2 + \frac{1}{n}\right) + F(a_1, a_2).
\end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy az eloszlásfüggvény tulajdonságaiból következik, hogy a felírt határértékek, például a $\lim\limits_{n\to\infty} F\left(b_1 + \frac{1}{n}, b_2 + \frac{1}{n}\right)$ kifejezés valóban létezik.

Hasonlán,

$$\begin{aligned}
P(a_1 < \xi_1 < b_1, a_2 < \xi_2 < b_2) &= \lim_{n\to\infty} P\left(a_1 + \frac{1}{n} \leq \xi_1 < b_1, a_2 + \frac{1}{n} \leq \xi_2 < b_2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} F(b_1, b_2) - F\left(b_1, a_2 + \frac{1}{n}\right) \\
&\qquad - \lim_{n\to\infty} F\left(a_1 + \frac{1}{n}, b_2\right) + \lim_{n\to\infty} F\left(a_1 + \frac{1}{n}, a_2 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

8* Legyen az $F(x_1, \ldots, x_k) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_k < x_k)$ függvény a $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ véletlen vektor eloszlásfüggvénye. Mutassuk meg a várható érték additivitásának felhasználásával (és alkalmas halmazok indikátorfüggvényének a bevezetésével), hogy

$$P((a_j \leq \xi_j < b_j,\ 1 \leq j \leq k) = \sum_{\substack{u_j = a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\ldots,k}} (-1)^{\psi(u_1,\ldots,u_k)} F(u_1, \ldots, u_k),$$

ahol $\psi(u_1,\dots,u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1,\dots,u_k$ sorozatban.
Megoldás: Adva valamely $u_1,\dots,u_k$ számok, definiáljuk a

$$B(u_1,\dots,u_k)=\{(t_1,\dots,t_k)\colon t_j<u_j,\ 1\le j\le k\}$$

halmazt, és legyen $\chi_{B(u_1,\dots,u_k)}(\omega)$ az $\{\omega\colon (\xi_1(\omega),\dots,\xi_k(\omega))\in B(u_1,\dots,u_k)\}$ halmaz indikátorfüggvénye. Legyen továbbá $\chi_{\mathbf{K}}(\omega)$ az $\{\omega\colon a_j\le\xi_j<b_j,\ 1\le j\le k\}$ halmaz indikátorfüggvénye. Elég megmutatni, hogy

$$\chi_{\mathbf{K}}(\omega)=\sum_{\substack{u_j=\ a_j \text{ vagy } b_j\\ j=1,\dots,k}}(-1)^{\psi(u_1,\dots,u_k)}\chi_{B(u_1,\dots,u_k)}(\omega),$$

mert véve ezután mind a két oldal várható értékét megkapjuk a kívánt azonosságot. Az is világos, hogy $\{\omega\colon a_j\le\xi_j<b_j,\ 1\le j\le k\}$ esetében a bizonyítandó azonosság mind a két oldala 1-gyel egyenlő. Azt kell észrevenni, hogy ekkor a jobboldalon a $\chi_{B(b_1,\dots,b_k)}(\omega)$ tag 1, és az összes többi tag a jobboldalon nulla.
Ha $\omega\in\Omega$ olyan, hogy az $a_j\le\xi_j<b_j$ egyenlőtlenségek nem teljesülnek minden $1\le j\le k$ indexre, akkor a baloldal nulla. Azt kell belátni, hogy ugyanez érvényes a jobboldalon. Világos, hogy a jobboldal nulla, ha $\xi_j(\omega)\ge b_j$ valamilyen j indexre. Azt az esetet kell még nézni, amikor $\xi_j(\omega)<b_j$ minden $1\le j\le k$ indexre, bizonyos j indexekre $a_j\le\xi_j<b_j$, de létezik legalább egy olyan l index, melyre $\xi_j<a_j$. Legyen L a legkisebb ilyen index. Ha párosítjuk az olyan $(-1)^{\psi(u_1,\dots,u_k)}\chi_{B(u_1,\dots,u_k)}(\omega)$ kifejezéseket, melyeknek az u_j koordinátátái megegyeznek $j\ne L$ esetben, de $u_L=a_L$ a pár egyik és $u_L=b_L$ a pár másik tagjára, akkor az összes ilyen pár hozadéka zéró. Ezért az azonosság ekkor is érvényes, mert mind a bal mind a jobboldal zéró ebben az esetben.

9. Adjuk meg a $[0,1\times\cdots\times[0,1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét.

b.) Tekintsük a síkon a $(0,0)$, $(0,1)$ és $(1,0)$ csúcspontok által meghatározott $\mathbf{K}$ háromszögön az egyenletes eloszlást. Adjuk meg ennek eloszlásfüggvényét.
Megoldás: A $[0,1\times\cdots\times[0,1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlása az $F(x_1,\dots,x_k)=G(x_1)\cdots G(x_k$ függvény, ahol $G(x)=0$, ha $x\le 0$, $G(x)=x$, ha $0\le x\le 1$, és $G(x)=1$, ha $x\ge 1$.
A tekintett háromszögön definiált egyenletes eloszlás $H(x,y)$ eloszlásfüggvénye, $H(x,y)=0$, ha $x\le 0$ vagy $y\le 0$. $H(x,y)=1$, ha ≥ 1 és $y\ge 1$. Definiálni kell még a $H(x,y)$ eloszlásfüggvényt abban az esetben, ha $0\le x\le 1$ és $0\le y\le 1$. Ebben az esetben $H(x,y)=2\lambda([0,x]\times[0,y]\cap\mathbf{K})$. innen $H(x,y)=xy$, ha $0\le x\le 1$ és $0\le y\le 1$, és $x+y\le 1$. Ha $0\le x\le 1$ és $0\le y\le 1$, és $x+y\ge 1$, akkor $H(x,y)=xy-\dfrac{1}{2}(x+y-1)^2$.

10*. Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+m}$ független valószínűségi változók, $g(x_1,\dots,x_n)$ n-változós (mérhető) függvény, $\eta=g(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Mutassuk meg a Fubini tétel segítségével, hogy $\eta,\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+m}$ független valószínűségi változók.
Megoldás: Rögzítsünk valamilyen $x_0,x_1,\dots,x_m$ számokat. Definiáljuk ezek segítségével a $h_j(u)=1$, ha $u<x_j$, $h_j(u)=0$, ha $u\ge x$, $1\le j\le m$, függvényeket,

valamint legyen $h_0(u_1,\dots,u_n)=1$, ha $g(u_1,\dots,u_n)<x_0$, $h_0(u_1,\dots,u_n)=0$, ha $g(u_1,\dots,u_n)\ge x_0$. Jelölje $F_j(\cdot)$ a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a Fubini tétel alapján

$$
\begin{aligned}
&P(\eta<x_0,\xi_{n+1}<x_{n+1},\dots,\xi_{n+m}<x_{n+m})\\
&\quad=\int h_0(u_1,\dots,u_n)h_1(u_{n+1})\dots h_{n+m}(u_{n+m})F(\,du_1)\dots F_{n+m}(\,du_{n+m})\\
&\quad=\int h_0(u_1,\dots,u_n)F(\,du_1)\dots F_{n+m}(\,du_n)\\
&\qquad\int h_1(u_{n+1})F(\,du_1)\cdots\int h_{n+m}(u_{n+m})F_{n+m}(\,du_{n+m})\\
&\quad=P(\eta<x_0)P(\xi_{n+1}<x_{n+1})\cdots P(\xi_{n+m}<x_{n+m}),
\end{aligned}
$$

ahonnan következik a feladat állítása.

11. Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független valószínűségi változók, és legyen a ξ_j, $1\le j\le n$, valószínűségi változónak sűrűségfüggvénye, és jelöljük az $f_j(\cdot)$-vel. Lássuk be a Fubini tétel segítségével, hogy a $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ véletlen vektornak is van sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1,\dots,u_n)=f_1(u_1)\cdots f_n(u_n)$ függvény.

Megoldás: Rögzítsünk valamilyen $x_0,x_1,\dots,x_n$ számokat, és definiáljuk ezek segítségével a $h_j(u)=1$, ha $u<x_j$, $h_j(u)=0$, ha $u\ge x$ $1\le j\le n$, függvényeket. Ekkor

$$
\begin{aligned}
P(\xi_1<x_1,\cdots,\xi_n<x_n)&=P(\xi_1<x_1)\cdots P(\xi_n<x_n)\\
&=\int h_1(u)f_1(u)\,du\cdots\int h_n(u)f_n(u)\,du\\
&=\int\cdots\int h_1(u_1)f_1(u_1)\cdots h_n(u_n)f_n(u_n)\,du_1\dots du_n\\
&=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_1(u_1)\cdots f_n(u_n)\,du_1\dots du_n
\end{aligned}
$$

ahonnan következik a feladat állítása.

12. Legyen ξ és η két független, a $\left[-\frac12,\frac12\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x)=1$, ha $-\frac12\le x\le\frac12$, és $f(x)=0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x)=\int f(y)f(x-y)\,dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac12,\frac12\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x-y)=1$, ha $-\frac12\le y\le\frac12$, és $-\frac12\le x-y\le\frac12$, azaz $-\frac12+x\le y\le \frac12+x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi+\eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az x pontban megegyezik a $\left[-\frac12,\frac12\right]\cap\left[-\frac12+x,\le\frac12+x\right]$ intervallum hosszával.

Ha $|x| > 1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x) =$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor ez a metszet a $\left[-\dfrac{1}{2} + x, \dfrac{1}{2}\right]$ intervallum, és ennek hossza $1 - x$, azaz ebben az esetben $g(x) = 1 - x$. Ha $-1 \le x \le 0$, akkor ez a metszet a $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + x\right]$ intervallum melynek hossza $1 + x = 1 - |x|$, azaz $g(x) = 1 + x = 1 - |x|$ ebben az esetben. Ez azt jelenti, hogy $g(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \le 1$, és $g(x) = 0$, ha $x > 1$.

Megadunk egy másik geometriai érvelésen alapuló megoldást is, amelyik a korábban tárgyalt geometriai érvelésen alapul.

Számítsuk ki először a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Definiáljuk a $K = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \times \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ négyzetet, és jelölje λ a Lebesgue mértéket, azaz a területet a síkon. Ekkor a sík tetszőleges $A \subset R^2$ mérhető részhalmazára igaz az, hogy $P((\xi, \eta) \in A) = \lambda(A \cap K)$. Speciálisan, $G(x) = P(\xi + \eta < x) = \lambda(K \cap \{(u, v)\colon u + v < x\})$. Ha $x \le -1$, akkor $G(x) = 0$, ha $-1 \le x \le 0$, akkor $G(x)$ a $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + x\right)$ és $\left(\frac{1}{2} + x, -\frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszög területe $\frac{1}{2}(1+x)^2$. Hasonlóan, ha $x \ge 1$, akkor $G(x) = 1$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor a $G(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik annak a poligonnak területével, melyet úgy kapunk, hogy a K négyzetből kihagyjuk a $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + x\right)$ és $\left(-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszöget. Ezért $G(x) = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2$ ebben az esetben. A $G(x)$ függvényt deriválva kapjuk, hogy $g(x) = 0$, ha $|x| \le 1$, $g(x) = 1 + x$, ha $-1 \le x \le 0$, és $g(x) = 1 - x$, ha $0 \le x \le 1$.

Tekintsünk két a második előadáson tárgyalt feladatot, melyet annak idején geometriai meggondolások alapján oldottunk meg. Megmutatjuk, hogy ezek a feladatok megoldhatóak a most tárgyalt konvolució segítségével is.

13. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

    Megoldás: Jelölje ξ_j, $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j-ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac{1}{2} \le \xi_1 - \xi_2 \le \frac{1}{2}$ események valószínűsége érdekel. Az $F(u) = P(\xi_1 - \xi_2 < u)$ eloszlás sűrűségfüggvénye a $g(u) = f_1 * f_2(u)$ konvolúció, ahol $f_1(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, $f_1(u) = 0$, különben, $f_2(u) = 1$, ha $-1 \le u \le 0$, $f_2(u) = 0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} g(u)\, du$ integrál. Továbbá,

    $$g(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x - u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(x - u)\, du, \quad -\infty < x < \infty,$$

    ahol $f(u) = 1$, ha $\frac{1}{2} \le u \le \frac{1}{2}$, $f(u) = 0$, ha $u \ge \frac{1}{2}$.

Az ötödik feladat megoldásában láttuk, hogy $g(u) = 1 - u$, ha $0 < u < 1$ $g(u) = 1 + u$, ha $-1 < u < 0$. Innen $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} (1 - |u|)\, du = \frac{3}{4}$.

14. Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

    Negoldás: Jelölje ξ_j, $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy a j-ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1, és ξ_2 független valószínűségi változók, melyek sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, melyre $f(x) = 2$, ha $0 \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Minket a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x) = f * f(x)$, ahonnan $g(x) = 2 - |2 - 4x|$, ha $0 \le x \le 1$, $g(x) = 0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt, melyet a a következő képletek adnak meg: $F(u) = 0$, ha $u \le 0$, $F(u) = 1 - 2u^2$, ha $0 \le u \le \frac{1}{2}$, $F(u) = 1 - 2(1 - u)^2 = 4u - 2u^2 - 1$, ha $\frac{1}{2} \le u \le 1$. Ha $u \ge 1$, akkor $F(u) = 1$.