DOLGOZAT FELADATOK

Megjegyzés: Abban az esetben, ha egy megkérdezett fogalom definícióját több (egymással ekvivalens) módon lehet megadni, akkor ezek mindegyike jó válasznak minősül.

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után 100-szor egymástól függetlenül. Számítsuk ki a páros értékű dobások összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.
2. Egy urnában 20 fehér és 30 piros golyó van. Kihúzunk 10 golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk egy ugyanolyan színű golyót. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.
3. Feldobunk egy szabályos dobókockát, majd ezután két szabályos dobókockát dobunk fel akkor, ha a dobás eredménye páros és egy dobókockát, ha a dobás eredménye páratlan szám. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy az első dobásban hatost dobtunk, feltéve, hogy a második dobásban megjelent egy hatos?
4. Mi a valószínűsége annak, hogy lottóhúzáskor (90 számból húznak ki ötöt), legalább hármas találatunk lesz?
5. Egy urnában n lap van, melyekre rá vannak írva a számok 1-től n-ig. Kihúzunk egy lapot véletlenül, minden lapot egyforma $\frac{1}{n}$ valószínűséggel, majd visszatesszük ezt a lapot az urnába és megismételjük a kisérletet. Mi a két kihúzott lapon levő szám összegének az eloszlása?
6. Legyen A_1, A_2 és A_3 három esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy az A_1, A_2 és A_3 események függetlenek?

Megoldások:

1. Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye páratlan, $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás értéke 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás értéke 4, és $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás értéke 6, $1 \le j \le 100$. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Viszont $E\xi_j = \frac{1}{6}(2+4+6) = 2$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{6}(2^2+4^2+6^2) = \frac{28}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{16}{3}$ minden $1 \le j \le 100$ indexre. Mivel a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, ezért ebből következik, hogy $E\xi = 200$ és $\operatorname{Var}\xi = \frac{1600}{3}$.
2. Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér, $1 \le j \le 10$. Ekkor minket a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Ennek kiszámítása érdekében számoljuk ki először a ξ_j, $1 \le j \le 10$, várható

értékeket, $\mathrm{Var}\,\xi_j$, $1 \le j \le 10$, szórásnégyzeteket és $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$, $1 \le j < k \le 10$, covarianciákat. Vegyük észre, hogy $E\xi_j$ megegyezik annak valószínűsével, hogy a j-ik húzás eredménye piros, ami, mint azt mind az órán mind a gyakorlaton megtárgyaltuk, megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros. Ezért $E\xi_j = \frac{3}{5}$. Hasonlóan, $E\xi_j\xi_k = E\xi_1\xi_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{31}{51}$, ahol az utolsó mennyiség annak valószínűsége, hogy az első két húzás piros. Ezért $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j E\xi_k - E\xi_j\xi_k = \frac{3}{5}\left(\frac{31}{51} - \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{425}$. Továbbá $\mathrm{Var}\,\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$. Ezért $E\xi = \sum_{j=1}^{10} E\xi_j = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$, és $\mathrm{Var}\,\xi = \sum_{j=1}^{10} \mathrm{Var}\,\xi_j + 2\sum_{j=1}^{9}\sum_{k=j+1}^{10} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = \frac{12}{5} + 90 \cdot \frac{2}{425} = \frac{12}{5} + \frac{36}{85} = \frac{240}{85} = \frac{48}{17}$.

3. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, és B azt az eseményt, hogy a második dobásban dobunk hatost. Ekkor a $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ valószínűséget kell kiszámolnunk. $P(A \cap B) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{25}{36}\right) = \frac{11}{216}$, mert $\frac{1}{6}$ annak valószínűsége, hogy az első dobás 6-os, ha ez bekövetkezik akkor két kockát dobunk fel, annak valószínűsége pedig, hogy ebben a két dobásban lesz hatos az 1 minusz annak a valószínűsége, hogy egyik dobás sem hatos, azaz $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$. Hasonlóan $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{36} = \frac{17}{72}$, ahol az összeg első tagja azt adja meg, hogy az első dobás páratlan, a második pedig hatos, míg a második tag annak valószínűségét, hogy az első dobás páros, a második dobásban pedig megjelenik egy hatos. Innen $P(A|B) = \frac{11}{51}$.

4. Annak valószínűsége, hogy pontosan három találatunk van $\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$, mert az öt jó számból kell kiválasztanunk 3-at és a 85 rosszból kettőt, és minden választás egyforma valószínű. Hasonlóan annak valószínűsésge, hogy pontosan négy találatunk lesz $\frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}$, és annak valószínűsége, hogy öt találatunk lesz $\frac{1}{\binom{90}{5}}$. Ezért a keresett valószínűség $\frac{5 \cdot 85 \cdot 84 + 5 \cdot 85 + 1}{\binom{90}{5}}$.

5. A két húzás eredményének az összege akkor lesz k, ha az első húzás eredménye valamilyen j a második húzás eredménye pedig $k - j$. Egy $(j, k-j)$ pár húzásának a valószínűsége $\frac{1}{n^2}$, ha $1 \le j \le n$, és $1 \le k - j \le n$, azaz $k - n \le j \le k - 1$, és nulla egyéb esetben. Ezért a kívánt valószínűség kiszámolásához azt kell tudnunk, hány olyan $(j, k-j)$ pár van, melynek valószínűsége $\frac{1}{n^2}$. Az ilyen párok száma nulla, ha $k \le 1$ vagy $k \ge 2n + 1$, ezért egy ilyen k nulla valószínűséggel lesz az

összeg értéke. Ha $1 \leq k \leq n+1$, akkor az ilyen számpárok száma $k-1$, mert az $1 \leq j \leq k-1$ számok esetén lesz a $(j, k-j)$ számpár megfelelő. Ezért az összeg $\frac{k-1}{n^2}$ valószínűséggel vesz fel egy $2 \leq k \leq n+1$ értéket. Ha $n+1 \leq j \leq 2n$, akkor az összeg $\frac{2n-k+1}{n^2}$ valószínűséggel veszi fel a k értéket, mert ebben az esetben a $(j, k-j)$ párnak olyannak kell lennie, melyre a $k-n \leq j \leq n$ egyenlőtlenség teljesül.

6. Az A_1, A_2 és A_3 események akkor függetlenek, ha a $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ és $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ azonosságok mindegyike teljesül.