

A Valószínűségszámítás I. előadássorozat első előadása.

2002 január 29.

Összefoglaló: Néhány a véletlenről szóló megjegyzés után rátértem a valószínűségszámítás két legfontosabb eredményének a nagy számok törvényének és a centrális határeloszlástétel némileg informális ismertetésére. Néhány példával próbáltam megvilágítani, hogy milyen természetes problémák megoldásában nyújtanak ezek az eredmények nagy segítséget. Ezután néhány valószínűségi probléma tárgyalásához fogtam hozzá, majd a valószínűségi mező általános definícióját adtam meg. Céлом volt megmutatni, hogy ez a formális definíció segít bizonyos hasznos heurisztikus elvek pontos megfogalmazásában. Előbb azonban mutattam két példát, melyek megmutatják, hogy milyen elméleti nehézségek leküzdésére volt szükség e fogalom megalkotásakor.

Tudjuk tapasztalatból, hogy évente körülbelül ugyanannyi fiú és lány születik. Ugyanakkor, az hogy az egyes újszülöttek fiúk lesznek-e vagy lányok a véletlentől függ. Természetes feltenni, hogy minden újszülött egymástól függetlenül lesz $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fiú vagy lány. Az, hogy ilyen körülmények között minden évben körülbelül ugyanannyi fiú és lány születik, tehát nem az a helyzet, hogy egyik évben a születendő fiúk a másik évben a születendő lányok száma sokkal nagyobb, a valószínűségszámítás egy nagyon fontos eredményének a *nagy számok törvényének* a következménye. Ez a törvény azt fejezi ki, hogy ha sok egymástól független kísérletet végzünk, melyek eredménye valamely véletlen szám, akkor a mért eredmények átlaga nagyon kevésbé ingadozik a kísérletek eredményének várható értéke körül. Ezt az állítást később fogjuk pontosabban megfogalmazni.

Szeretnénk pontosabb eredményeket kapni arról, hogy mekkora ez az ingadozás. Ilyen eredményt ír le az úgynevezett *centrális határeloszlástétel*. A probléma megértése érdekében tekintsük a következő problémát. Valaki a következő játékot ajánlja fel nekünk. Feldob egy (szerinte) szabályos pénzdarabot 10 000 alkalommal. Fejdobás esetén mi fizetünk neki 1 forintot, írásdobás esetén ő fizet nekünk 1 forintot. Elhisszük-e, hogy a pénzdarab valóban szabályos volt, ha mind a 10 000 dobás fej volt? És akkor, ha 9000 fej és 1000 fej dobás történik? Ha 6000 fej és 4000 írásdobás? Ha 5200 fej és 4800 írásdobás? Ha 5050 fej és 4950 írásdobás?

Természetesen elvileg előfordulhat, hogy egy szabályos pénzdarab, melyet feldobunk 10 000 alkalommal minden egyes esetben a fej oldalra esik. Csak ennek a valószínűsége rendkívül kicsi, $2^{-10\,000}$. Nagyon hihetetlennek tűnhet, hogy egy ilyen esemény valóban bekövetkezik. Ugyancsak rendkívül kicsi annak a valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint 9000. A nagy számok törvénye szerint nagy x számra annak valószínűsége, hogy a fej-dobások száma nagyobb mint $5000 + x$ rendkívül kicsi nagy x számok esetén. De felmerül a kérdés mely x számok tekinthetők nagynak. Ahhoz, hogy ezt a kérdést meg tudjuk válaszolni, jó lenne ismerni egy olyan eredményt, amelyik közelítőleg megadja annak a valószínűségét, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $5000 + x$ egy szabályos pénzdarab feldobása esetén. Ilyen eredmény ismeretes, és ezt nevezik a centrális határeloszlástételnek.

Érdeemes megjegyezni, hogy ilyen jellegű kérdések máskor is természetes módon

felmerülnek. Például a 2000. évi amerikai elnökválasztáson nagyon szoros volt a Florida államban a két fő jelölt által elért eredmény. A különböző időpontokban megadott eredmények szerint egyszer mondtak olyan szoros eredményt is, mely szerint a leadott 5 000 000 szavazatból a két jelöltre leadott szavazatok különbsége mindössze 300 volt. Felmerül a kérdés: Ha feltesszük, hogy az egyes szavazók egymástól függetlenül szavaztak, és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választották valamelyik jelöltet, akkor egy ilyen rendkívül szoros választási eredmény rendkívülinek tekinthető vagy viszonylag nagy a valószínűsége annak, hogy a szavazatok különbsége ilyen feltételek mellett kisebb mint 300. A centrális határeloszlástétel segítséget nyújt e kérdés megválaszolásában, és e szerint az eredmény szerint egy ilyen esemény valószínűsége körülbelül 0.1. Ezt a feladatot később tárgyalni fogjuk.

Érdeemes megjegyezni, hogy a centrális határeloszlástétel más fontos problémákban is megjelenik. Tegyük fel, hogy lámpák összelettartamára vagyunk kíváncsiak. Olyan lámpákat használunk melyek várható élettartama 100 óra, de valódi élettartamuk véletlen valamilyen ingadozással. Ha egy lámpa kiég akkor kicseréljük egy következő lámpára, melynek várható élettartama szintén 100 óra, de valódi élettartama ekörül a várható érték körül ingadozik. Az összes lámpa együttes élettartama ekkor 10 00 óra plusz valamilyen véletlen ingadozás. A centrális határeloszlástétel ennek az ingadozásnak az eloszlásáról nagyon érdekes eredményt mond ki. Ennek az eloszlásnak jellegzetes alakja van, és ez magyarázza meg azt is, miért jelenik meg teljesen különböző problémákban egy jellegzetes harang-görbének nevezett görbe. Ezt az eredményt majd a centrális határeloszlástétel tárgyalása során fogom pontosan elmagyarázni.

A valószínűségszámítás vizsgálatában egy másik nagyon fontos hatás volt különböző szerencsejátékok vizsgálata. Ezek alaposabb vizsgálata nagyon hasznos volt, több értékes gondolat háttérében a szerencsejátékok vizsgálata van. Érdeemes megjegyezni, hogy az első ilyen híres probléma De Méré lovagtól származik, aki Pascaltól kérdezte meg két szerencsejátékkal kapcsolatos kérdését. Ezek egyikét de Méré lovag is meg tudta oldani, de a másikat nem. Pascal megoldotta ezt a feladatot, illetve megírta a Toulouseban élő Fermatnak. Fermat is megoldotta ezt a problémát. Fermat megoldási módszere különbözött, de ugyanazt az eredményt kapta. Ezután írta Pascal sokat idézett mondatát: Ugyanaz az igazság Párizsban és Toulouseban. Leírom de Méré lovag kérdéseit, de e feladatok megoldását a gyakorlaton fogjuk tárgyalni.

De Méré lovag problémája:

- a.) Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz? Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz.

(De Méré lovag arra csodálkozott rá, hogy az első valószínűség $\frac{1}{2}$ -nél kicsit nagyobb, a második valószínűség pedig $\frac{1}{2}$ -nél kicsit kisebb.)

- b.) Két játékos egy igazságos játékot játszik, melynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el hat nyerést. A játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek három a másikuknak pedig öt nyerése volt. Hogyan

kell igazságosan osztozkodniuk?

Mégis a ma tárgyalt modern valószínűségszámítás megalkotása jóval később történt. Ez Andrei Nyikolaevics Kolmogorov nevéhez fűződik, aki az 1930-as években írt *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie* (A valószínűségszámítás alapjai) című művében adta meg a valószínűségszámítás ma használt modelljét, és bizonyította be néhány alapvető eredményt, melyek lehetővé tették e modell használatát. Két természetes kíváncsi fogalmazható meg a valószínűségszámítás jó modelljével szemben.

- (i) Elvárjuk, hogy minden természetes véletlennel kapcsolatos feladat tárgyalható legyen ebben a modellben.
- (ii) Elvárjuk, hogy azok a hasznos gondolatok, érvek, melyek lehetővé teszik konkrét feladatok megoldását, alkalmazhatóak legyenek a vizsgált modellben.

Kolmogorov modellje mind a két kíváncsi kielégíti. Mielőtt azonban ennek ismertetésére térnénk tekintsünk néhány egyszerű feladatot, melyek vizsgálata természetessé teheti a később bevezetendő fogalmakat.

1. Egy pénzdarabot feldobunk kétszer. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás lesz? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás lesz?

Megoldás: A dobások lehetséges kimenete, (F, F) , (F, I) , (I, F) és (I, I) . Ezen lehetséges kimenetek mindegyikének a valószínűsége $\frac{1}{4}$. Ezért annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás, azaz az (F, I) vagy (I, F) dobássorozat következik be $\frac{1}{2}$. Annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás, azaz az (F, F) , (F, I) vagy (I, F) dobássorozatok eredménye következik be, $\frac{3}{4}$.

2. Feldobunk két szabályos dobókockát. Mi annak a valószínűsége, hogy a dobáseredmények összege pontosan 9 illetve pontosan 10? Hány különböző módon fordulhat elő, hogy a dobások összege 9 és hány különböző módon lehet a dobások összege 10?

Megoldás: A dobások összegének eredménye akkor 9, ha a $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$ vagy $(6, 3)$ dobáspárok valamelyike következik be. Ezen dobássorozatok mindegyikének valószínűsége $\frac{1}{36}$, ezért $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy az összeg pontosan 9. Hasonlóan, az összeg akkor 10, ha a $(4, 6)$, $(5, 5)$ vagy $(6, 4)$ dobáspárok valamelyike jelenik meg, és ennek a valószínűsége $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Jegyezzük meg, hogy a fenti tárgyalásban az egyes kimenetek felsorolásában nemcsak azt vettük figyelembe, hogy milyen dobáseredmények jelentek meg, hanem azt is, hogy melyik kockán jelentek meg ezek a dobáseredmények. Miért?

3. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzzunk 25 golyót visszatevéssel. Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?

Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel

húzzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét majd 50 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Hasonlóan, annak valószínűsége, hogy az 5. húzásban piros golyót húzzunk ki $\frac{2}{5}$, és annak valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzzunk $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

Jegyezzük meg, hogy a következő feladat megoldása egy olyan érvelést tartalmaz, amelyik ebben az esetben is alkalmazható, és megmutatja, hogy annak valószínűsége, hogy az 5. húzás piros és a 16. húzás fehér megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros és a második húzás fehér. Érdekes ezeket az érveléseket még egyszer végiggondolni azután, hogy megtárgyaltuk a valószínűségi mező pontos definícióját.

4. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzzunk 25 golyót *visszatevés nélkül*. Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tizenhatodik húzás eredménye fehér?

Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét, majd 49 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Belátjuk, hogy annak valószínűsége, hogy a 16. húzásban piros golyót húzzunk ki, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, azaz ez $\frac{2}{5}$. Továbbá annak a valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás eredménye fehér, a második húzás eredménye piros. Ezért ez a valószínűség is $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$.

Tekintsük ugyanis az összes 25 hosszúságú húzássorozatot. Ekkor annak valószínűsége, hogy az 5. húzás eredménye piros a 16. húzás eredménye fehér megegyezik az összes olyan 25 hosszúságú húzássorozat valószínűségének az összegével, melyek 5. helyén piros és a 16. helyén fehér jegy áll. Hasonlóan számítható ki annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros és a második húzás eredménye fehér, azzal a különbséggel, hogy az 5. hely helyett az első és a 16. hely helyett a második helyet kell tekinteni. Be fogjuk látni, hogy ugyanaz a képlet fejezi ki ezt a két különböző valószínűséget, ezért ezek a valószínűségek megegyeznek.

A fenti állítás bizonyítása érdekében először mutassuk meg, hogy annak valószínűsége, hogy valamely előírt konkrét 25 hosszúságú piros fehér golyókból álló sorozat jelenik meg csak attól függ, hogy ez a sorozat hány piros és hány fehér golyót tartalmaz, de nem függ a fehér és piros húzások sorrendjétől. Valóban, ha egy húzássorozat k piros és $25 - k$ fehér golyót tartalmaz, akkor ennek valószínűsége

$$P(k) = \frac{25 \cdot 24 \cdots (25 - k + 1) \cdot 30 \cdot 29 \cdots (30 - (25 - k) + 1)}{50 \cdot 49 \cdots 26}.$$

Ugyanis egy előírt húzássorozat valószínűsége $\prod_{j=1}^{25} \frac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$ -ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j -ik húzás piros, és a $j-1$ -ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j -ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával.

Jelölje $A(k; 5, 16)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, melyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, és az 5. helyen piros a 16. helyen pedig fehér jel áll. Jelölje továbbá $A(k; 1, 2)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, melyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, az 1. helyen piros a 2. helyen pedig fehér jel áll. Ekkor a két összehasonlítandó valószínűség $\sum_k A(k; 5, 16)P(k)$ illetve $\sum_k A(k; 1, 2)P(k)$. Ezért annak érdekében, hogy megmutassuk a kívánt azonosság teljesülését elegendő belátni azt, hogy $A(k; 5, 16) = A(k; 1, 2)$ minden k számra.

Viszont nem nehéz belátni, hogy $A(k; 5, 16) = A(k; 1, 2) = \binom{23}{k-1}$, mert mind a két esetben 23 előírt helyre kell írni $k-1$ piros és $25-(k+1)$ fehér golyót.

Tanulságos az utolsó azonosság következő az előzőtől különböző bizonyítása: Mutassuk meg, hogy ha tekintjük az összes 25 hosszúságú k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmazó sorozatot, akkor az ilyen sorozatok 5. jelét kicserélve az elsővel és a 16. jelét a másodikkal kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk azon halmazok között, melyek számosságaként definiáltuk az $A(k; 5, 16)$ és $A(k; 1, 2)$ számokat.

Hasonlóan mutatható meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első, illetve hogy az ötödik húzás eredménye piros megegyezik.

Az előző példák, illetve azok megoldásai mutatják, hogy érdemes a valószínűségi feladatok halmazelméleti modelljét tekinteni, és azokat jobban megérteni. A formális definíció megadása előtt tekintsünk néhány problémát, ahol természetes heurisztikus elképzeléseink vannak. Látni fogjuk, hogy ezek az elképzelések helyesek, de azok bizonyítása, felhasználása szükségessé teszi néhány mély elméleti eredmény kidolgozását.

Első példa: Ledobunk a $[0, 1]$ egységintervallumra egymástól függetlenül először egy x majd egy y pontot, azaz annak valószínűsége, hogy az x vagy y pont az egységintervallum valamely $[a, b] \subset [0, 1]$ részintervallumába esik megegyezik ezen intervallum $|b-a|$ hosszával, annak valószínűsége pedig, hogy az egységnégyzet belsejében lévő az (x, y) pontpár által meghatározott pont egy az egységnégyzetben levő $[a, b] \times [c, d] \subset [0, 1] \times [0, 1]$ téglalapba esik megegyezik ennek a téglalapnak $(b-a)(c-d)$ területével. Azt várjuk, hogy annak valószínűsége, hogy az (x, y) pont egy az egységnégyzet belsejében lévő r sugarú körbe esik megegyezik ennek a körnek $r^2\pi$ területével. Általánosabban, azt várjuk, hogy annak valószínűsége, hogy az (x, y) pont egy az egységnégyzet belsejében lévő A halmazba esik egyenlő ennek a halmaznak a területével.

Helyes-e ez a természetes elképzelés? Alapjában véve helyes, de felmerül egy komoly elvi probléma. Nevezetesen a következő kérdést kell tisztázni: Annak az állításnak, hogy a véletlen (x, y) pont akkora valószínűséggel esik egy A halmazba, mint amennyi ennek az A halmaznak a területe csak akkor van értelme, ha beszélhetünk az A halmaz területéről. Van-e értelme tetszőleges halmaz területéről beszélni? Gondoljuk meg,

hogy már egy kör területének a meghatározása sem egyszerű. Általánosan az a helyzet, hogy komoly elvi okok miatt nem tudjuk minden halmaz területét definiálni. De azoknak a halmazoknak, melyek konkrét feladatokban megjelennek mindig definiálható a területe. Annak tisztázása viszont, hogy ez valóban így van komoly elméleti eredmények bizonyítását és felhasználását igényli. A kívánt eredményeket az analízis illetve mértékelmélet tantárgyban ismertetni fogják. Ezen elmélet részleteivel azonban ebben az előadássorozatban nem foglalkozunk, és annak ismerete nem szükséges a későbbiek megértéséhez.

Második példa: Feldobunk egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor egymás után. Az egyes dobások eredménye egymástól függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fej és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel írás. Jelölje $k(n)$ a fejdobások számát az első n dobásban. Azt várjuk, hogy a $\frac{k(n)}{n}$ számoknak van $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$ határértékük, és az a $\frac{1}{2}$ valószínűséggel egyezik meg. Látni fogjuk, hogy ez az állítás igaz. Ezt az állítást hívják a nagy számok erős törvényének. De ahhoz, hogy ezt az állítást bebizonyítsuk először azt kell tisztáznunk, hogy a megfogalmazott állításnak van értelme. Mint látni fogjuk, nem minden lehetséges eseménynek definiáljuk a valószínűségét. Megmutatjuk, hogy annak az eseménynek, hogy a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$ határérték létezik, és ez a határérték $\frac{1}{2}$ valóban létezik valószínűsége. Az, hogy ez a valószínűség eggyel egyenlő, későbbi vizsgálatok eredményéből fog következni.

Annak érdekében, hogy a fenti problémákat tárgyalni tudjunk, először definiálni kell pontosan azokat a valószínűségi modelleket, amelyekben dolgozni fogunk. Tisztázni kell, hogy mely eseményeknek definiáljuk a valószínűségét, és az hogyan számolható ki. Ezt tesszük az alábbiakban. A háttérben levő kép a következő: A valószínűségszámításnak halmazelméleti modellt fogunk adni, melyben minden esemény egy olyan halmaz, amelynek van valószínűsége. A következőre gondolhatunk: Egy elvégzett kísérletnek lehet valamilyen kimenete, egy esemény pedig bizonyos kimenetek összességét tartalmazó halmaz, amelynek van valószínűsége. Ennek prezíz, formális megfogalmazását adjuk meg az alábbiakban. Annak érdekében, hogy ezt a definíciót jobban megértsük, tekintsünk előbb egy példát, melyben egy szabályos pénzdarab végtelen sok dobását leíró modellt adunk meg. Ennek a modellnek a definíciójában lényegében az összes komoly elvi nehézség megjelenik.

Ha feldobunk egy pénzdarabot végtelen sokszor, akkor a kimenetek a lehetséges végtelen (F, F, I, \dots) fej-írás sorozatok. Nevezzük az egyes lehetséges sorozatokat elemi eseményeknek. A biztos esemény, melyet általában Ω -val jelölnek az irodalomban, és amelyik azt jelenti, hogy a lehetséges kimenetek valamelyike bekövetkezett, megegyezik az összes elemi eseményekből, azaz az összes lehetséges fej-írás sorozatból álló halmazzal. Az események ezen halmaz részhalmazai. Például az az esemény, hogy az első dobás fej, megegyezik azon végtelen fej-írás sorozatokból álló halmazzal, mely sorozatok első jegye fej, és a további jegyek tetszőlegesek. Hasonlóan, az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és a hatodik dobás eredménye írás, megegyezik azzal a halmazzal, mely azon végtelen fej-írás sorozatokból áll, melyek második jegye fej, hatodik jegye írás.

Definiálni akarjuk az egyes események, (halmazok) valószínűségét is. Ez bizonyos esetekben egyszerű. Például a biztos esemény valószínűsége 1. Annak az eseménynek, hogy az első tíz dobásban csupa fej jött ki, azaz annak a halmaznak, mely azokat a végtelen fej-írás sorozatokat tartalmazza, melyeknek első tíz jegye fej, és a későbbi jegyek pedig tetszőlegesek a valószínűsége 2^{-10} . De hogyan definiáljuk tetszőleges esemény, (halmaz) valószínűségét? Bizonyos események valószínűségét természetes módon meg tudjuk mondani azon elv alapján, hogy szabályos pénzdarabot dobtunk fel, és a dobások eredményei függetlenek egymástól. Bizonyos természetes szabályok szerint további események valószínűségét is ki tudjuk számítani. De meg tudjuk-e adni minden halmaz valószínűségét? A válasz erre a kérdésre nemleges. Ez az első látásra zavaró körülmény, — mint később kiderült — nem okoz akkora problémát, mint ahogy azt az első pillanatban gondolnánk. Ugyanis a minket érdeklő halmazoknak van valószínűsége. A „minket érdeklő halmazok” most talán kissé misztikusan hangzó fogalma valójában természetes. Azok a halmazok ilyenek, melyeket le tudunk írni. Ez úgy is érthető, hogy tudunk olyan programot írni, mely pontosan megadja, hogy mely pontok tartoznak ebbe a halmazba és melyek nem.

Feladat: Melyik halmaz írja le a fenti modellben azt az eseményt, hogy az első tíz dobásban több fej mint írás dobás van.

Jegyezzük meg, hogy az előbb vázolt modell, (pontosabban a modell definíciójának elkezdése) nem az egyetlen lehetséges modellje egy szabályos pénzdarab leírásának. Tekinthejtük például az összes lehetséges külső fizikai körülményt, melyek meghatározzák a dobások eredményét, és lehetnek az elemi események ezen külső körülmények lehetséges állapotai. Vagy tekinthejtük két szabályos pénzdarab végtelen sokszori feldobásának a modelljét, és ezután mondhatjuk azt, hogy mi a második pénzdarab dobásainak az eredményeit is megfigyeljük, de az minket nem érdekel. Valójában a valószínűségszámítás feladatai a következő jellegűek. Adva van egy valószínűségi mező, amelyikben bizonyos események valószínűségét ismerjük. Határozzuk meg ennek alapján bizonyos minket érdeklő más ezen eseményektől függő események valószínűségét. Mint látni fogjuk az ilyen kérdésekre adott válasz nem függ attól, hogy milyen valószínűségi modellt tekintettünk.

Most pedig megfogalmazzuk azt az általános sémát, melyet minden valószínűségi modellnek teljesíteni kell.

A valószínűségszámítás Kolmogorov féle modellje.

Valószínűségi mező definíciója. Azt mondjuk, hogy egy (Ω, \mathcal{A}, P) rendszer valószínűségi mező, ha Ω , melyet biztos eseménynek is nevezünk, bizonyos általában ω -val jelölt elemekből (pontokból) áll, melyeket elemi eseményeknek is neveznek. Ezenkívül kijelöltük az Ω halmaz bizonyos kitüntetett részhalmazait, melyek úgynevezett σ -algebrát alkotnak, és melyet \mathcal{A} -val jelöltünk. Azon halmazoknak (eseményeknek), melyek a \mathcal{A} σ -algebra elemei, van valószínűségük, és ezek a valószínűségek nem-negatív egyre normált σ -additív halmazfüggvényt, úgynevezett valószínűségi mértéket alkotnak.

Annak érdekében, hogy a fenti definíciót teljessé tegyük, tisztáznunk kell a σ -

algebra illetve a nem-negatív egyre normált σ -additív halmazfüggvény fogalmát. Azután meg kell beszélni, hogy például a korábban tárgyalt feladatokat hogyan tárgyalhatjuk ennek a modellnek a segítségével.

Algebra és σ -algebra definíciója. Legyen adva egy Ω halmaz, és azoknak bizonyos $A \subset \Omega$ részhalmazainak \mathcal{A} rendszere. Azt mondjuk, hogy \mathcal{A} algebra, ha tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ halmazra ennek komplementere, az $\Omega \setminus A$ halmaz is eleme a \mathcal{A} halmazrendszernek, azaz $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$, és az \emptyset üres halmaz (valamint az Ω biztos esemény) is eleme az \mathcal{A} algebrának, azaz $\emptyset \in \mathcal{A}$, és $\Omega \in \mathcal{A}$. Továbbá, ha $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ elemei az \mathcal{A} halmazrendszernek, akkor e halmazok metszete illetve uniója is teljesíti az $A \cap B \in \mathcal{A}$ és $A \cup B \in \mathcal{A}$ feltételeket.

Az \mathcal{A} algebra akkor σ -algebra, ha ezen kívül teljesíti a következő feltételeket is: Ha A_1, A_2, \dots , megszámlálható sok halmaz, melyek az \mathcal{A} algebra elemei, azaz $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor ezek metszete és uniója is benne van az \mathcal{A} (σ)-algebrában, azaz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, és $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Additív és σ -additív halmazfüggvény definíciója. Legyen adva egy Ω halmaz részhalmazaiából álló \mathcal{A} σ -algebra. Azt mondjuk, hogy egy $\mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$, halmazfüggvény additív, ha bármely diszjunkt $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ halmazra, (azaz olyan A és B halmazokra, melyekre $A \cap B = \emptyset$), $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Azt mondjuk, hogy ez a μ halmazfüggvény nemcsak additív, hanem σ -additív is, ha minden diszjunkt $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, halmazokra $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Ez a σ -additív halmazfüggvény nem-negatív, ha minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $\mu(A) \geq 0$, és egyre normált, ha $\mu(\Omega) = 1$.

1. megjegyzés: Annak megmutatáához, hogy a fenti definíció valóban hasznos és jó definíció szükség van néhány mély eredményre az analízisből és mértékelméletből. Erre a kérdésre a későbbi előadásokban térek ki. De már most fel lehet vetni a következő kérdést: Az, hogy megköveteltük a valószínűség σ -additívitasát, és nem elégedtünk meg a közönséges additívítással nem túlságosan megszorító feltétel-e, nem zártunk-e ki ezzel a megkötéssel olyan problémákat vizsgálatainkból, melyekkel érdemes lenne foglalkozni a valószínűségszámításban? A válasz az, hogy nem történt ilyen kellemetlen megszorítás, de ennek igazolása mély matematikai eredmények felhasználását igényli.

2. megjegyzés: A jelölésrendszer az irodalomban nem egyértelmű. Van ahol két A és B halmaz unióját és metszetét $A \cup B$ illetve $A \cap B$ -vel és van ahol $A + B$ illetve AB -vel jelölik. Hasonlóan megszámlálható sok halmaz unióját illetve metszetét szokás bizonyos helyeken $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, illetve a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ jelöléssel, másutt pedig a $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ illetve $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ jelöléssel megadni. Végül két halmaz különbségét szokás bizonyos helyeken $A \setminus B$ -vel másutt $A - B$ -vel jelölni.