A Valószínűségszámítás I. előadássorozat tízenegyedik előadása.
2002 április 16.

Először néhány további példát mutatunk a centrális határeloszlástétel alkalmazására.

1. feladat:

Egy szabályos dobókockát és egy szabályos érmét feldobunk 3300 alkalommal egymástól függetlenül. (Az érme és kockadobások eredményei is függetlenek egymástól.) Ha a kockadobás eredménye páros és az érme a fej oldalra esett, akkor annyi forintot nyerünk, amennyi a kockadobás eredménye. Ha az érme az írás oldalra esett vagy a kockadobás eredménye páratlan szám, akkor nem nyerünk, és nem is vesztünk semmit. Mi a valószínűsége annak, hogy az össznyereményünk 3190 és 3520 forint közé esik? Adjunk erre jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, és η_j $1 \le j \le 3300$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik kockadobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik kockadobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik kockadobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik kockadobás eredménye 1, 3 vagy 5. Legyen $\eta_j = 1$, ha a j-ik érmedobás eredménye fej, és $\eta_j = 0$, ha a j-ik érmedobás írás. Legyen $\zeta_j = \xi_j\eta_j$. Ekkor a j-ik dobásnál a nyereményünk ζ_j lesz, $1 \le j \le 3300$, és a $P\left(3190 \le \sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Ennek érdekében számoljuk ki a független ζ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. $E\zeta_j = E\xi_j\eta_j = E\xi_j E\eta_j = \frac{1}{6}(2+4+6)\frac{1}{2} = 1$, $E\zeta_j^2 = E\xi_j^2 E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(4+16+36)\cdot\frac{1}{2} = \frac{14}{3}$, $\operatorname{Var}\zeta_j^2 = E\zeta_j^2 - (E\zeta_j)^2 = \frac{11}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(3190 \le \sum_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right) = P\left(\frac{-110}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j - \sum\limits_{j=1}^{3300} E\zeta_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{3300} \operatorname{Var}\xi_j}} \le \frac{220}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}}\right)$$

$$\sim \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.9285.$$

2. feladat:

Legyen birtokunkban 100 lámpa, melyek mindegyike egymástól független időtartamig működik, élettartamuk pedig exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (A lámpák élettartamának exponenciális eloszlása természetes feltételezés.) Egy termet bevilágítunk ezen lámpák valamelyikével, majd amikor az kiégett új lámpát használunk fel. Adjunk jó becslést arra, hogy a lámpák összélettartama legalább 1150 óra.

Megoldás: Jelölje ξ_j a j-ik lámpa éléttartamát, $1 \le j \le 100$. Ekkor a $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150)$ valószínűségre kell jó becslést adnunk, ahol az összegben független exponenciális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. Vezessük be az $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$ jelölést.

Kiszámoltuk, hogy jelen esetben $E\eta = mE\xi_1 = \dfrac{m}{\lambda} = 1000$, $\operatorname{Var}\eta = \dfrac{m}{\lambda^2} = 10000$ ($m = 100$ és $\lambda = \dfrac{1}{10}$ választással). Ezért a centrális határeloszlástétel szerint $\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} = \dfrac{\eta - 1000}{100}$ jó közelítéssel standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150) = P\left(\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} > 1.5\right) \sim 1 - \Phi(1.5)$.

A centrális határeloszlástétel nagy segítséget ad a matematikai statisztika két fontos problémakörében, a becsléselméletben és a hipotézisvizsgálatban. A becsléseleméletben olyan kérdésekkel foglalkunk mint például a következő kérdések: Mennyi egy lámpa várható élettartama, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kocka a hatos oldalra esik, mi a valószínűsége, hogy egy (életbiztosítást kötni akaró ember) megéli a hetvenedik évet? Általában a kérdés a következő: Egy esemény eloszlása függ valamilyen ismeretlen paramétertől, és ezt a paramétert akarjuk megbecsülni. Ennek érdekében kisérleteket végzünk, és valamilyen jó módszer segítségével próbáljuk megbecsülni az ismeretlen paramétert e kisérletek eredményének a függvényében.

A hipotézisvizsgálatban a feladat az, hogy bizonyos hipotézisünk van arról, hogy mennyi az élettartama egy lámpának, mennyire népszerű egy vélemény a választók között, hogy egy gyógyszer hatásosabb mint egy másik vagy valamilyen hasonló problémáról van valamilyen ellenőrizendő feltételezésünk. Annak érdekében, hogy eldöntsük, helyes-e a hipotézisünk kisérleteket végzünk. Ha kisérleteink eredménye nagyon valószínűtlen hipotézisünk teljesülése esetén, akkor hipotézisünket elutasítjuk, ha pedig valószínű, akkor elfogadjuk azt. De mikor tekintjük a bekövetkezett eredményt valószínűnek és mikor valószínűtlennek? E kérdés eldöntésében sokszor a centrális határeloszlástétel segít. Erre mutatunk néhány példát. E példák tárgyalása előtt bevezetjük a matematikai statisztika néhány egyszerű és természetes fogalmát. Jelen előadássorozatban csak a hipotézisvizsgálattal foglalkozunk, az ehhez kapcsolódó fogalmakat vezetjük be.

Azt a feltételezést, melyet ellenőrízni akarunk nevezik null-hipotézisnek, annak ellenkezőjét pedig ellenhipotézisnek. Vannak olyan feladatok, melyekben a null-hipotézis egyetlen elemből áll, például, ha azt tételezzük fel, hogy egy dobókocka szabályos. Az ilyen hipotéziseket nevezik egyszerű hipotézisnek. Vannak olyan feladatok, melyekben a null-hipotézis több elemból áll, például az a feltételezés, hogy egy javaslatot az emberek legalább fele támogat. Az ilyen hipotéziseket hívják összetett hipotézisnek. Két fajta hibát követhetünk el. Az egyik hiba az, hogy a hipotézis teljesül, mi mégis elutasítjuk azt. Ezt nevezik elsőfajú hibának. Ha a hipotézis nem teljesül, mi mégis úgy döntünk, hogy az teljesül, akkor ezt másodfajú hibának nevezzük. Az elsőfajú hiba csökkentése érdekében minél többször kell elfogadni, a másodfajú hipotézis csökkentése érdekében pedig minél többször kell elutasítani a hipotézist. A gyakorlatban általában úgy szokták a feladatokat megfogalmazni, hogy az elsőfajú hibára előírunk egy felső korlátot, és eme feltétel mellett próbáljuk a másodfajú hibát minél kisebbé tenni. Az elsőfajú hibára adott felső korlát összetett null-hipotézis esetén azt jelenti, hogy az elsőfajú hiba minden a null-hipotézis teljesülése esetén előfordulható eloszlás esetén legyen kisebb mint az előírt felső korlát.

3. feladat

Egy pénzdarabról ellenőrizni akarjuk, hogy igaz-e az a hipotézis, mely szerint ez az érme legalább $\frac{3}{4}$ valószínűséggel esik a fej és legfeljebb $\frac{1}{4}$ valószínűséggel az írás oldalára. Ennek érdekében feldobjuk a pénzdarabot 30 000 alkalommal, és a következő döntési szabályt hozzuk. Választunk egy k számot, és akkor fogadjuk el a hipotézist helyesnek, ha legalább k fejdobás történt. Legalább mekkorának kell válassztanunk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy egy a hipotézist teljesítő pénzdarab esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy a hipotézis teljesül?

Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 30\,000$, $S = S_{30000} = \sum_{j=1}^{30\,000} \xi_j$. Ha a fejdobás eredményének valószínűsége pontosan $\dfrac{3}{4}$, $E\xi_j = \dfrac{3}{4}$, $E\xi_j^2 = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \dfrac{3}{16}$, $ES = 30\,000 E\xi_j = 22\,500$, $\operatorname{Var} S = 30\,000 \operatorname{Var}\xi_j = 5625 = 75^2$. Innen és a centrális határeloszlástételből,

$$P(S > k) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} > \frac{k - 22\,500}{75}\right) = 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{k - 22\,500}{75}\right)$$
$$\sim 1 - \Phi\left(\frac{k - 22\,500}{75}\right).$$

Válasszuk a k számot úgy, hogy a fenti valószínűség körülbelül 0.9 legyen. Ekkor a $\Phi\left(\dfrac{k - 22\,500}{75}\right) = 0.1$ vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Phi\left(\dfrac{22\,500 - k}{75}\right) = 0.9$ egyenletet kell kielégítenünk. A normális eloszlás-táblázat alapján $\dfrac{22\,500 - k}{75} \sim 1.28$, ami azt jelenti, hogy $k = 22\,500 - 75 \times 1.28$ és $p = \dfrac{3}{4}$ esetén annak valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $k = 22\,500 - 75 \times 1.28 = 22\,212$ és $p = \dfrac{3}{4}$ esetében annak valószínűsége, hogy legalább ennyi fejdobás történik körülbelül 0.9. Ha $p \ge \dfrac{3}{4}$, akkor ez a valószínűség nagyobb. Ezért a $k = 22\,212$ helyes választás.

Házi feladat.

Egy szabályos dobókockát feldobunk 2700 alkalommal egymástól függetlenül, és összeszámoljuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 420 és 720 közé esik.

Eloszlások konvergenciájáról.

A centrális eloszlátétel formális megfogalmazása úgy szól, hogy bizonyos valószínűségi változók eloszlásának sorozata konvergál a normális eloszlásfüggvényhez. Annak érdekében, hogy ezt bebizonyítsuk először tisztázni kell a következő kérdést: Mikor mondjuk azt, hogy valószínűségi változók eloszlásai konvergálnak egy határeloszláshoz? Ez a kérdés nem annyira egyszerű mint azt az első pillanatban gondolnánk. E fogalom helyes definiciója a centrális határeloszlástétel bizonyításának az első természetes lépése. A problémát az okozza, hogy egy általános elvet kell kidolgoznunk, amelyik viszonylag jól ellenőzízhető feltételt ad arra, hogy eloszlásfüggvények egy sorozata konvergáljon egy eloszlásfüggvényhez. Ehhez viszont az eloszlásban való konvergencia jó definicoját kell megadni, és ezt olyan határeloszlások esetében is meg kell tennünk, melyek bonyolultabbak, mint a normális eloszlásfüggvény. Ezért olyan az eloszlások konvergenciájával kapcsolatos problémákat is tárgyalnunk kell, melyek abban a szép esetben, amikor normális eloszlás a határeloszlásfüggvény nem merülnek meg. (Magának a centrális határeloszlástétel részletes bizonyítását időhiany miatt elhagyjuk.)

Eloszlásban való konvergencia definiciója. *Legyen $F_n(\cdot)$, $n=1,2,\dots$, eloszlásfüggvények sorozata a számegyenesen. Azt mondjuk, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ az $F(\cdot)$ (határ)eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában.*

Legyen ξ_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez, ha az $F_n(x)=P(\xi_n<x)$, $-\infty<x<\infty$, eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F(x)$ eloszlásfüggvényhez.

Legyen ξ_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $F_n(x)=P(\xi_n<x)$, $-\infty<x<\infty$, eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F(x)=P(\xi<x)$, $-\infty<x<\infty$ eloszlásfüggvényhez.

Megjegyzés: A normális eloszlásfüggvény minden pontban folytonos. Ezért a centrális határeloszlásfüggvény azt mondja ki, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizáltjai eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszlásfüggvényhez. Ebben az esetben nincs jelentősége annak, hogy a határeloszlásláslásfüggvény (jelen esetben nem létező) szakadási pontjaiban nem követeljük meg a konvergenciát.

Felmerül a kérdés, miért van kitüntetett szerepe a határeloszlásfüggvény szakadási pontjainak az eloszlásfüggvény konvergenciájának definiciójában. Természetes-e, hogy ezekben a pontokban nem követeltük meg a konvergenciát? E kérdés megértésének érdekében tegyük a következő megjegyzést.

Egy a számegegyenesen megadott F eloszlásfüggvény indukál egy valószínűségi mértéket a számegyenesen. Ez az a Stieltjes mérték, melyet μ_F-fel jelöltünk, melynek létezését csak kimondtuk, de a bizonyítás a mértékelmélet feladata. Az eloszlásban való konvergencia definiciójában valójában nem az F_n eloszlásfüggvények konvergenciáját követeljük meg az F eloszláshoz, hanem az F_n eloszlások által indukált μ_{F_n} Stieltjes mértékek konvergenciáját az F eloszlás által indukált μ_F mértékhez. Szemléletesen a

μ_{F_n} mértékek elképzelhetőek mint olyan tömegeloszlások a számegyenesen, melyekben egy $A \subset R$ halmaz „súlya” a $\mu_F(A)$ mérték. Az eloszlásban való konvergencia azt jelenti, hogy a μ_{F_n} tömegeloszlások nagy n indexre közel vannak a μ_F tömegeloszláshoz.

Az eloszlásban való konvergencia jobb megértése érdekében tekintsük a következő egyszerű példát. Legyen $x_0 = 0$, és x_n, $n = 1, 2, \dots$, olyan számsorozat, melyre $x_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$, és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Legyen μ_{F_n}, $n = 0, 1, 2, \dots$, az a mérték, mely az x_n pontba van koncentrálva, azaz $\mu_{F_n}(\{x_n\}) = 1$, részletesebben $\mu_{F_n}(A) = 1$, ha $x_n \in A$, és $\mu_{F_n}(A) = 0$, ha $x_n \notin A$. A μ_{F_n} eloszlás azon F_n eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mérték, melyre $F_n(x) = 0$, ha $x \le x_n$, $F_n(x) = 1$, ha $x > x_n$. Természetes azt várni, hogy az eloszlásfüggvény alkalmas definiciója esetén a most definiált példában az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszláshoz. Másrészt vegyük észre, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$ minden $x \ne 0$ számra. De az $x = 0$ pontban, azaz az F_0 függvény szakadási pontjában ez a konvergencia nem teljesül, mert $F_n(0) = 1$, ha $n \ge 1$, és $F_0(0) = 0$. Tehát az általunk megadott definició szerint az F_n eloszlások eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszláshoz, de annak érdekében, hogy ez teljesüljön szükség volt arra, hogy az eloszlásban való konvergencia definiciójában nem követeljük meg az eloszlásfüggvények konvergenciáját a határfüggvény szakadási pontjaiban.

Be lehet látni, hogy az eloszlásban való konvergencia kifejezi azt a szemléletes tartalmat, melyet a tömegeloszlásokkal való reprezentáció sugall, ezt azonban nem tesszük. Ehelyett egy olyan eredményt fogalmazok meg, az eloszlásban való konvergencia egy ekvivalens jellemzését adja meg. Ennek az eredménynek csak bizonyításvázlatát adom meg, bár a bizonyítás nem nehéz. Utána röviden leírom, miért hasznos ez az eredmény határeloszlástételek vizsgálatában.

Tétel. *$F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$ eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen értelmezett folytonos, korlátos $g(u)$ függvényre teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty} \int g(u)\, dF_n(u) = \int g(u)\, dF(u) \tag{a}$$

azonosság.

Megjegyzés: Az eloszlásban való konvergenciát szokás gyenge konvergenciának is nevezni. Érdemes megjegyezni, hogy a funkcionálanalízisben is szokás Banach terek funkcionáljainak gyenge konvergenciájáról beszélni, és az előbb kimondott tétel azt is jelenti, hogy a gyenge konvergencia valószínűségszámításban és funkcionálanalízisben használt értelmezése összhangban van egymással. Ugyanis egy a számegyenesen definiált μ (valószínűségi) mértéket fel lehet fogni mint a korlátos és folytonos függvények Banach terén értelmezett (korlátos és lineáris) funkcionált. Nevezetesen a μ mérték az $f(\cdot)$ korlátos és folytonos függvényhez hozzárendeli a $\mu(f) = \int f(u)\mu(\,du)$ számot. A funkcionálanalízisben definiált fogalomrendszer szerint a μ_n mértékek gyenge konvergenciája a μ mértékhez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \int f(u)\mu_n(\,du) = \int f(u)\mu(\,du)$ minden folytonos és korlátos függvény esetében, ez pedig a fent kimondott tétel szerint a μ_n mértékeknek, pontosabban az általuk meghatározott $F_n(x) = \mu_n(\{u\colon u < x\})$

eloszlásfüggvények gyenge (azaz eloszlásbeli) konvergenciáját jelenti a μ mértékhez, pontosabban az általa meghatározott $F(x) = \mu(\{u\colon u < x\})$ eloszlásfüggvényhez.

Binonyításvázlat: Tegyük fel először azt, hogy az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy F eloszlásfüggvényhez, és tekintsünk egy folytonos és korlátos $g(\cdot)$ függvényt a számegyenesen. Ekkor a g függvény folytonossága és az F illetve F_n eloszlásfüggvények viselkedése miatt $\pm\infty$ pontok környezetében minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan elég nagy $K = K(\varepsilon) > 0$, melyre $\int_{u\colon |u|>K} |g(u)|\, dF_n(u) < \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és ez az állítás érvényes akkor is, ha az F_n eloszlásfüggvényt az F eloszlásfüggvénnyel helyettesítjük. Továbbá a folytonos $g(\cdot)$ függvény a $[-K, K]$ intervallumban egyenletesen folytonos. Ennek az észrevételnek és annak a ténynek a segítségével, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ az $F(\cdot)$ minden folytonossági pontjában be lehet látni, véve a $[-K, K]$ intervallumnak egy olyan elég finom felosztását, melynek az osztópontjai az F függvény folytonossági pontjai, hogy

$$\left| \int_{u\colon |u|\le K} g(u)\, dF_n(u) - \int_{u\colon |u|\le K} g(u)\, dF(u) \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } n \ge n_0(\varepsilon).$$

(E lépésben kihasználjuk azt, hogy egy monoton függvénynek csak megszámlálható sok szakadási pontja van. Miért?) Innen $\varepsilon \to 0$ határátmenettel megkapjuk az (a) állítás bizonyítását.

Megfordítva tegyük fel, hogy teljesül az (a) reláció, és legyen x az F függvény folytonossági pontja. Rögzítve egy kis $\varepsilon > 0$ számot definiáljuk a következő $g^{\pm}(u) = g^{\pm}_{x,\varepsilon}(u)$, $-\infty < u < \infty$ folytonos és korlátos függvényeket: $g^+(u) = 0$, ha $u \ge x + \varepsilon$, $g^+(u) = 1$, ha $u \le x$, $g^+(u) = \dfrac{x + \varepsilon - u}{\varepsilon}$, ha $x \le u \le x + \varepsilon$, $g^-(u) = 0$, ha $u \ge x$, $g^-u) = 1$, ha $u \le x - \varepsilon$, $g^-(u) = \dfrac{x - u}{\varepsilon}$, ha $x - \varepsilon \le u \le x$. Alkalmazva az (a) állítást kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(x-\varepsilon) &\le \int g^-_{\varepsilon,x}(u) F(\,du) = \lim_{n\to\infty} \int g^-_{\varepsilon,x}(u) F_n(\,du) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le \lim_{n\to\infty} \int g^+_{\varepsilon,x}(u) F_n(\,du) = \int g^+_{\varepsilon,x}(u) F(\,du) \le F(x+\varepsilon), \end{aligned}$$

és véve az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, feltéve, hogy az x pont az F függvény folytonossági pontja.

Sok vizsgálatban az eloszlásban való konvergenciának a tételben megadott jellemzése jobban használható mint az eredeti definició.

Mellékesen megjegyzem, hogy ennek az eredménynek egy másik haszna az, hogy ezt a definiciót jobban tudjuk általánosítani, ha eloszlások konvergenciáját akarjuk definiálni általánosabb terekben. Az ilyen kérdések természetes módon felmerülnek, ha nemcsak valószínűségi változók viselkedését akarjuk vizsgálni, hanem véletlen folyamatokét egy véges időintervallumban. Itt az a probléma merül fel, hogy az eloszlásfüggvény, illetve annak konvergenciája nem definiálható általános terekben, mert az eloszlásfüggvény definiciójában szereplő félegyenesek túlságosan erősen kötődnek a számegyenes, a többdimenziós eloszlások definiciója pedig az Euklidesi tér geometriájához. Ha eloszlásfüggvények helyett valószínűségi mértékeket tekintünk, akkor ezek konvergenciájának a definicióját természetes módon tudjuk definiálni nagyon általános terekben is az (a) reláció általánosítása segítségével.

Ha eloszlásfüggvények konvergenciáját az (a) tulajdonság vizsgálatának segítségével akarjuk bebizonyítani, akkor természetes módon felmerül az a kérdés, hogy nem lehetséges-e ezt a feltételt gyengíteni, nem elegendő-e az (a) reláció teljesülését a folytonos és korlátos függvényeknek csak egy elég gazdag részosztályára ellenőrizni, és ennek segítségével eldönteni, hogy teljesül-e az eloszlásban való konvergencia. Természetesen a folytonos és korlátos függvények olyan részosztályát kívánjuk tekinteni, amelyikre ez a feltétel könnyebben ellenőrizhető. Kiderült, hogy erre a kérdésre igenlő választ lehet adni, elegendő csak a trigonometrikus függvényeket tekinteni, azaz az $g_t(u) = e^{itu}$, $-\infty < t < \infty$, alakú függvényeket. Jegyezzük meg, hogy ezek a függvények komplex és nem valós értékűek, de mindazok az eredmények, melyek valós értékű valószínűségi változókra érvényesek, természetes módon általánosíthatók komplex szám értékű valószínűségi változókra is. Annak oka, hogy a trigonometrikus függvényeket jól tudjuk használni az, hogy minden $-\infty < s, t < \infty$, paraméterre teljesül a $g_s(u)g_t(u) = e^{isu}e^{itu} = e^{i(s+t)u} = g_{s+t}(u)$ azonosság. Látni fogjuk, hogy ez az azonosság sok segítséget jelent, ha független valószínűségi változók összegeinek eloszlását vizsgáljuk. Megjegyzem, hogy az ilyen jellegű összefüggések alkalmazása nemcsak a valószínűségszámításban fontos. Ennek általánosításán alapul az algebra egy mély és fontos területe, a csoportreprezentációk elmélete.

A további vizsgálatokban hasznos a karakterisztikus függvények alább megadott definiciója.

Valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a definiciója. *Legyen ξ valószínűségi változó valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és jelölje $F(u) = P(\xi < u)$, $-\infty < u < \infty$, a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. A ξ valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye a*

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} F(\,du), \quad -\infty < t < \infty,$$

függvény. Adva egy F eloszlásfüggvény az F eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét is definiálni fogjuk mint egy F eloszlású ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. (Mivel a karakterisztikus függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a segítségével ki lehet számolni, ezért jogunk van egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről beszélni.)

A következő egyszerű állításokat azok fontosságuk miatt külön Lemma formájában mondjuk ki.

Lemma valószínűségi változók karakterisztikus függvényének viselkedéséről. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, jelölje $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ e valószínűségi* *változók összegét és $\varphi_j(t)$, $1 \le j \le n$, a ξ_j valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor az S_n összeg karakterisztikus függvénye a $\psi_n(t) = Ee^{itS_n} = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t)$, $-\infty < t < \infty$ függvény. Ha A és $B \ne 0$ valós számok, akkor a $\dfrac{S_n - A}{B}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az*

$$Ee^{it(S_n-A)/B} = e^{-itA/B}\psi_n\left(\frac{t}{B}\right) = e^{-itA/B}\prod_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{t}{B}\right)$$

függvény.

Legyen ξ olyan valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénnyel, melyre teljesül az $E|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^k F(\,du) < \infty$ egyenlőtlenség valamilyen k pozitív egész számra. Ekkor a ξ valószínűségi változó $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényének a deriváltjai megadhatók a $\dfrac{d^j}{dt^j}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(\,du)$ képlettel minden $0 \le j \le k$ és $-\infty < t < \infty$ számra. Speciálisan, $t = 0$ választással $\left.\dfrac{d^j\varphi(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j F(\,du) = i^j E\xi^j$ minden $0 \le j \le k$ számra.

Bizonyítás:

$$Ee^{itS_n} = E^{it(\xi_1+\cdots+\xi_n)} = Ee^{it\xi_1}e^{it\xi_2}\cdots e^{it\xi_n} = Ee^{it\xi_1}Ee^{it\xi_2}\cdots Ee^{it\xi_n} = \prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)$$

a ξ_j, $1 \le j \le n$, függetlensége miatt illetve az $e^{it\xi_j}$ valószínűségi változók ebből következő függetlensége miatt. Ezenkívül

$$Ee^{it(S_n-A)/B} = Ee^{i(t/B)S_n}e^{-itA/B} = e^{-itA/B}\psi_n\left(\frac{t}{B}\right),$$

ha az S_n valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\psi_n(t)$. Innen következnek a Lemma első paragrafusában kimondott állítások.

A Lemma második paragrafusában kimondott állítás bizonyítása érdekében írjuk fel a $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}F(\,du)$ azonosságot, és differenciáljuk j, $j \le k$, alkalommal. Be lehet látni, hogy az $E|\xi|^k < \infty$ feltétel teljesülése esetén az azonosság jobboldalán az integrálás és differenciálás sorrendje felcserélhető. Innen kapjuk, hogy $\dfrac{d^j}{dt^j}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(\,du)$. Alkalmazva a $t = 0$ helyettesűtést megkapjuk a Lemma utolsó bizonyítandó állítását is.

Megjegyzés: Legyenek $\xi_1, \xi_2 \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E\xi_1 = 0$, és vezessük be a $\sigma_2 = \operatorname{Var}\xi_1$, valamint az $Ee^{it\xi_1} = \varphi(t)$, $-\infty <$

$t < \infty$ ($\varphi(t)$ a ξ_1 valószínűségi változó karakterisztikus függvénye) jelöléseket. Legyen továbbá $S_n = \sum\limits_{k=1} \xi_k$ és $\bar{S}_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}$ az S_n valószínűségi változó normalizáltja. Ekkor $Ee^{itS_n} = \varphi(t)^n$, $Ee^{it\bar{S}_n} = \varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^n$, és $\varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \sim 1 - \dfrac{t^2}{2n\sigma^2}$. Ez a formula lehetővé teszi, hogy viszonylag jó becslést adjunk a $\bar{S}_n$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényére. Azt kívánjuk vizsgálni, lehetővé teszi-e ez a formula egy jó határeloszlástétel bizonyítását független, egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizáltjának az összegére.

Tekintsük először csak azt a speciális esetet, amikor olyan olyan ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét tekintjük, amelyik csak egész értékeket vesz fel. Legyen $P(\xi = k) = p_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$. Ekkor a ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} P(\xi = t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikt}$, $-\infty < t < \infty$. Ekkor a $\varphi(t)$ függvény 2π szerint periódikus, és tulajdonképpen egy Fourier sor, melynek k-ik (azaz az e^{ikt} trigonometrikus függvényhez tartozó Fourier együtthatója) p_k. A Fourier sorok elméletének egy egyszerű, de nagyon fontos eredménye alapján egy $\varphi(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$, $-\pi < t \le \pi$, függvény Fourier együtthatóit a $\varphi(t)$ Fourier sor ismeretében az

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t)\, dt \tag{$*$}$$

képlet segítségével ki lehet számolni. Az előbb kimondott Lemma alapján független valószínűségi változók normalizált összegének a karakterisztikus függvényére viszonylag egyszerű és jó közelítést lehet adni. Ez és a $(*)$ formula azt is lehetővé teszi, hogy egész értékű valószínűségi változók esetében jó becslést adjunk arra, hogy független valószínűségi változók összegei egy adott értéket vesznek fel. Ez lehetővé teszi a centrális határeloszlástétel bizonyítását abban a speciális esetben, ha egész értékű valószínűségi változók összegét vizsgáljuk. Az általános eset vizsgálatának a vezérmotívuma tulajdonképpen az, hogyan tudjuk ezt a módszert adaptálni az általános esetre, amikor nem áll rendelkezésünkre a $*$ képlethez hasonló viszonylag egyszerű ,,inverziós formula". Most az egész értékű valószínűségi változók vizsgálatánál a részletek kidolgozása helyett megmutatjuk a kiegészítésben azt, hogy hogyan lehet ennek a módszernek a segítségével az analízis egyik fontos képletét az úgynevezett Stirling formulát bebizonyítani. Ez a következő eredmény.

Stirling formula:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

azaz az első n egész szám szorzat $n!$ teljesíti az alábbi relációt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1.$$

Ahhoz, hogy a karakterisztikus függvényekkel jól tudjunk számolni szükségünk van olyan eredményre, mely szerint a trigonometrikus polinomok a folytonos függvények elég gazdag részosztálya. Ilyen eredmény Weierstrass második approximációs tétele, mely azt mondja ki, hogy folytonos és periodikus függvényeket tetszőleges pontossággal lehet közelíteni a szuprémum normában trigonometrikus polinomokkal. (Weierstrass első approximációs tétele hasonló állítást fogalmaz meg véges intervallumban folytonos függvények polinomokkal való approximálhatóságáról.) Megfogalmazzuk ezt az eredményt, és (vázlatosan) bebizonyítjuk annak néhány számunkra fontos következményét.

Weierstrass második approximációs tétele. *Tetszőleges folytonos és 2π szerint periodikus $f(t)$ függvényre és $\varepsilon > 0$ valós számra létezik olyan $P_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ trigonometrikus polinom, melyre*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |f(t) - P_n(t)| < \varepsilon.$$

Ahhoz, hogy eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek konvergenciájából következtetni tudjunk magunknak az eloszlásfüggvényeknek a konvergenciájára tudnunk kell azt, hogy az a karakterisztikus függvények meghatározzák az eloszlásfüggvényeket. Megfogalmazzuk ezt az eredményt, és megadjuk annak bizonyítását Weierstrass második apprximációs tétele segítségével.

Tétel. *Legyen $F(\cdot)$ és $G(\cdot)$ két eloszlásfüggvéy, melyek karakterisztikus függvénye megegyezik. Ekkor $F(x) = G(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy Weierstrass második approximációs tételéből következik, hogy tetszőleges $K > 0$ és $\varepsilon > 0$ számokra és a K szám szerint periodikus $h(\cdot)$ függvényre igaz, hogy létezik olyan $P_n(t) = \sum\limits_{j=-n}^{n} a_j e^{2\pi i j t/K}$ trigonometrikus polinom, melyre teljesül a $\sup\limits_{-\infty<t<\infty} |P_n(t) - h(t)| \le \varepsilon$ becslés. Integrálva a $h(\cdot)$ és a $P_n(\cdot)$ függvényt a F és G eloszlásfüggvény szerint, a fenti approximációból kapjuk, hogy $\int |h(u) - P_n(u)| F(\,du) \le \varepsilon$ és $\int |h(u) - P_n(u)| G(\,du) \le \varepsilon$. Ezért $\left|\int h(u)F(\,du) - \int h(u)G(\,du)\right| \le 2\varepsilon$. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$ számra igaz, ezért $\int h(u)F(\,du) = \int h(u)G(\,du)$. Továbbá, innen következik az is, hogy ha $h(\cdot)$ kompakt tartójú, folytonos függvény, azaz ha létezik olyan A szám, melyre $h(u) = 0$, ha $|u| \ge A$, akkor $\int h(u)F(\,du) = \int h(u)G(\,du)$. Valóban, definiáljuk minden $K > A$ számra azt a $h_K(\cdot)$ függvényt, mely a $h(\cdot)$ függvény $[-K, K]$ intervallumra vett megszorításának a $2K$ szerinti periodikus kiterjesztése, azaz $h_K(u) = h(u - 2lK)$, ahol l olyan egész szám, melyre $-K \le u < K$. Ekkor $\int h(u)F(\,du) = \lim\limits_{K\to\infty} \int h_K(u)F(\,du) = \lim\limits_{K\to\infty} \int h_K(u)G(\,du) = \int h(u)G(\,du)$.

Legyenek $-\infty < x < y < \infty$ olyan számok a számegyenesen, melyek folytonossági pontjai mind az F mind a G eloszlásfüggvénynek. Belátjuk a fenti reláció segítségével, hogy $F(y) - F(x) = G(y) - G(x)$. Valóban, rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és definiáljuk a következő $h(\cdot) = h_\varepsilon(\cdot)$függvényt: $h(u) = 1$, ha $x \le u \le y$, $h(u) = 0$, ha $y +$

$\varepsilon \le u$ vagy $u \le x-\varepsilon$, $h(u) = \dfrac{y+\varepsilon-u}{\varepsilon}$, ha $y \le u \le y+\varepsilon$, $h(u) = \dfrac{u-x+\varepsilon}{\varepsilon}$, ha $x-\varepsilon \le u \le x$. Felhasználva az $\int h_\varepsilon^\pm(u)F(\,du) = \int h_\varepsilon^\pm(u)G(\,du)$ azonosságot, és azt hogy $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int h_\varepsilon(u)F(\,du) = F(y)-F(x)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int h_\varepsilon(u)G(\,du) = G(y)-G(x)$, ha x és y az F és G függvény folytonossági pontjai, $\varepsilon \to 0$ határátmenettel kapjuk az $F(y)-F(x) = G(y)-G(x)$ azonosságot.

Ez utóbbi azonosságot felhasználva és alkalmazva az $x \to -\infty$ határátmenetet kapjuk, hogy $F(y) = G(y)$, ha y mind az $F(\cdot)$ mind a $G(\cdot)$ eloszlásfüggvénynek folytonossági pontja. Mivel az F és G eloszlásfüggvénynek csak megszámlálható sok szakadási pontja van, és mind a két függvény balról folytonos, innen következik, hogy az F és G eloszlásfüggvények megegyeznek.

Az előző tétel bizonyítási módszerének finomítása segítségével lehet bebizonyítani a következő eredményt, melyet fontossága miatt alaptételnek nevezünk. Ennek bizonyítása azonban a Fourier analízis más módszereit is felhasználja. Emiatt, illetve időhiány miatt a bizonyítást elhagyom.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel. *Legyen $F_n(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(\,du)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$. Ha a $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ határérték létezik minden $-\infty < t < \infty$ számra, és a $\varphi_0(t)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(u)$ eloszlásfüggvény, melynek a $\varphi_0(t)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az $F_n(u)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvényeknek egy olyan sorozata, mely egy $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, jelöli az $F_n(u)$, $\varphi_0(t)$ pedig az $F_0(u)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, akkor $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.

Megjegyzés: Az előadáshoz csatlakozó gyakorlatban kitűztem egy (elméleti jellegű) feladatot, mely fontos szerepet játszik a bizonyításban. E feladat eredményének a segítségével tudjuk kihasználni a tétel azon feltételét, hogy a karakterisztikus függvények határértéke folytonos a nullában.

Feladat:

Legyen $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények egy sorozata, melyek $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvényei az origó egy kis környezetében konvergálnak egy a nullában folytonos függvényhez.

a.) Lássuk be (a Lebesgue tétel segítségével), hogy ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$ szám, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\delta} \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}\,[1-\varphi_n(t)]\,dt \le \varepsilon$, ahol $\operatorname{Re} z$ a z szám reális részét jelöli.

b.) Mutassuk meg, hogy amennyiben $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvényei teljesítik az a) részben megfogalmazott tulajdonságot, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ szám, melyre $F_n(-K) + (1 - F_n(K)) \le \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra.

Ennek a feladatnak az eredménye lehetővé teszi, hogy alkalmazva annak az eredménynek a bizonyításmódszerét, mely szerint a karakterisztikus függvény meghatározza az eloszlásfüggvényt belássuk a következő állítást: Ha $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei konvergálnak minden pontban egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéhez, (mely folytonos az origóban), akkor az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez.

Feladat:

Mutassuk meg, hogy egy F eloszlásfüggvény $\varphi(t) = \int e^{itu} F(\,du)$ karakterisztikus függvénye folytonos minden pontban.

A fent kimondott alaptétel tartalmasabb állítás mint az, amire szükségünk lesz. Ha azt akarjuk belátni, hogy F_n eloszlásfüggvények egy sorozata konvergál egy F_0 eloszlásfüggvényhez, akkor elég belátni, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvényeknek a $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(\,du)$ karakterisztikus függvényei konvergálnak az F_0 eloszlásfüggvény $\varphi_0(t) = \int e^{itu} F_0(\,du)$ karakteriszikus függvényéhez minden $-\infty < t < \infty$ pontban. (Jegyezzük meg, hogy egy karakterisztikus függvény folytonos függvény, ezért az a követelmény, hogy az eloszlásfüggvények karakterisztikusfüggvényeinek határfüggvénye legyen folytonos teljesül abban az esetben, ha az eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak).

Az alaptétel többet mond annál mint amire szükségünk van. Ez az eredmény segít eldönteni azt, hogy eloszlásfüggvények sorozatának mikor van határértéke, és mi ez a határérték. Az alaptétel alkalmazható olyan esetekben is, amikor eredetileg még nem sejtjük mi a határérték. Azt állítja, hogy ha a karakterisztikusfüggvények sorozatának van egy az origóban folytonos határfüggvénye, akkor ez a határfüggvény egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, és egyben ez az eloszlásfüggvény a keresett limesz. (Annak eldöntése, hogy egy konkrét függvény mikor karakterisztikus függvénye valamely eloszlásnak általában nehéz kérdés.) Annak érdekében, hogy lássuk annak a feltételnek a fontosságát, mely szerint a határfüggvény folytonos az origóban tekintsük a következő feladatban megadott példát.

Feladat:

Legyen $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2 \dots$, a $[-n, n]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, azaz legyen $F_n(\cdot)$ sűrűségfüggvénye az $f_n(u) = \dfrac{1}{2n}$, ha $-n \le u \le n$, $f_n(u) = 0$, ha $|u| > n$ képlet segítségével megadott függvény. Lássuk be, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei minden pontban konvergálnak az $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) = 0$, ha $t \ne 0$ képlettel megadott $\varphi(t)$ függvényhez, amelyik az origóban nem folytonos. Továbbá az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban, mert minden véges $[a, b]$ intervallumra $\lim\limits_{n\to\infty} F_n([a, b]) = 0$.

Az alaptétel alapján a centrális határeloszlástétel bizonyításához elég kiszámolni a standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, és megmutatni, hogy ha vesszük független, egyforma eloszlású valószínűségi változók összegeinek a normalizáltjait, akkor ezek karakterisztikus függvényei a standard normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez tartanak. Fogalmazzuk meg először azt az eredményt, mely megadja a standard normális eloszlásfüggvény karakerisztikus függvényét.

Tétel a standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről. *A* $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$*,* $-\infty < u < \infty$*, sűrűségfüggvénnyel rendelkező standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye a* $g(t) = e^{-t^2/2}$ *függvény, azaz*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = e^{-t^2/2}.$$

Magyarázat:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u-it)^2/2} e^{-t^2/2}\, du \\ &= e^{-t^2/2} \int_{-\infty-it}^{\infty-it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} e^{-t^2/2}\, du.\end{aligned}$$

A fenti számolásban a szokásos technikát alkalmaztuk, az exponensben szereplő kvadratikus alakot teljes négyzetté alakítotuk át. Azt állítom, hogy

$$\int_{-\infty-it}^{\infty-it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} e^{-t^2/2}\, du = 1.$$

Ez az integrál abban különbözik a standard normális sűrűségfüggvény integráljától, hogy a normális sűrűségfüggvény integrálját nem a valós tengelyen, hanem egy vele párhuzamos egyenesen tekintjük. Azz állítom, hogy ez az integrál ugyanannyi, mintha a valós tengelyen intergáltunk volna. Ezt nem nehéz belátni, ha szabad hivatkozni a komplex függvénytan talán legfontosabb eredményére, mely szerint egy analitikus függvény körintegrálja egy zárt görbén nulla. Azt kell kihasználni, hogy a $g(x) = e^{-z^2/2}$ függvény analitikus az egész számsíkon, és, ezenkívül a $g(z)$ függvény olyan, hogy amennyiben a z argumentum imaginárius részének az abszolut értéke kisebb mint valamely fix K szám reális részének az abszolut értéke pedig nagyon nagy, akkor a $g(z)$ függvény nagyon kicsi. Mivel ez a bizonyítás a komplex függvénytani ismeretek felhasználása segítségével egyszerűen végrehajtható, viszont ez a komplex függvénytani rész, melyet nem tanult mindenki elengedhetetlen a bizonyításban, ezért a részletek kidolgozását elhagyom.

A fenti eredmények segítségével nem nehéz belátni a centrális határeloszlástételt. Valában, legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $E\xi_1^2 < \infty$. Jelölje $\varphi(\cdot)$ a ξ_j valószínűségi változó karakterisztikus függvényét, $M = E\xi_j$, $D^2 = \operatorname{Var} \xi_j$, (mivel a ξ_j valószínűségi változók egyforma eloszlásúak, ezért a fenti mennyiségek nem függnek a j indextől), és legyen $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$. Ekkor a karakterisztkus függvényekről kimondott lemma alapján S_n normalizáltjának az $\dfrac{S_n - nM}{\sqrt{n}D}$ valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye az

$$\left(e^{-itM/\sqrt{n}D}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}D}\right)\right)^n$$

függvény. Ezért a centrális határeloszlástétel bizonyításához azt kell belátni, hogy

$$\left(e^{-itM/\sqrt{n}D}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}D}\right)\right)^n \to e^{-t^2/2}, \quad \text{ha } n \to \infty \text{ minden } t \text{ számra.}$$

Viszont alkalmazva a karakterisztkus függvényekről kimondott lemma második állítását és a $\varphi(0) = 1$ egyenlőséget Taylor sorfejtés segítségével kapjuk, hogy $\varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}D}\right) = 1 + \dfrac{itM}{\sqrt{n}D} - \dfrac{t^2 E\xi_1^2}{2nD^2} + o\left(\dfrac{t^2}{2n}\right)$. Továbbá, hasonlóan Taylor sorfejtés segítségével kapjuk, hogy $e^{-itM/\sqrt{n}D} = 1 - \dfrac{itM}{\sqrt{n}D} - \dfrac{t^2M^2}{2nD^2} + o\left(\dfrac{t^2}{n}\right)$. E két aszimptotikus egyenlőséget összeszorozva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} e^{-itM/\sqrt{n}D}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}D}\right) = {} & \left(1 + \frac{itM}{\sqrt{n}D} - \frac{t^2E\xi_1^2}{2nD^2} + o\left(\frac{t^2}{2n}\right)\right) \\ & \left(1 - \frac{itM}{\sqrt{n}D} - \frac{t^2M^2}{2nD^2} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

mert elvégezve a beszorzásokat kapjuk, hogy t együtthatója nulla, t^2 együtthatója $-\left(\dfrac{iM}{\sqrt{n}D}\right)^2 - \dfrac{E\xi_1^2}{2nD^2} - \dfrac{M^2}{2nD^2} = -\dfrac{1}{2n}$, és ezenkívül már csak $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ nagyságrendű tagok szerepelnek a szorzatban. Innen viszont következik, hogy

$$\left(e^{-itM/\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}D}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^{-t^2/2}, \quad \text{ha } n \to \infty$$

minden t számra, és ezt kellett belátnunk.

Feladat:

Mutassuk meg, a karakterisztikus függvények segítségével, hogy amennyiben ξ és η két független, normális eloszlású valószínűségi változó m_1 és m_2 várható értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel, akkor $\xi + \eta$ normális eloszlású valószínűségi változó $m_1 + m_2$ várható értékkel, és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ szórásnégyzettel.

Kiegészítés

A Stirling formula bizonyítása: Először azt mutatjuk meg, hogy

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{2\pi}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}. \tag{a}$$

Tekintsünk egy ξ Poisson eloszlású valószínűségi változót $\lambda = n$ paraméterrel, legyen azaz $P(\xi = k) = \dfrac{n^k}{k!}e^{-n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Szám1tsuk ki a ξ valószínűségi változó $P(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvényét. Ez a következő $P_n(t)$ Fourier sor:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k)e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}e^{-n+ikt} = e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ne^{it})^k}{k!} = e^{-n+ne^{it}}.$$

Innen, illetve a $(*)$ formulából $k = n$ választással kapjuk, hogy

$$P(\xi = n) = \frac{n^n}{n!}e^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}P_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int-n+ne^{it}})\,dt.$$

Ez a formula ekvivalens az (a) formulával.

Az (a) formula alapján a Stirling formula bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt = 1,$$

amit úgyis írhatunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\,dt} = 1.$$

Viszont tekintve az e^{it} függvény Taylor sorát kapjuk, hogy

$$n(e^{it} - 1 - it) = -n\left(\frac{t^2}{2} + \alpha(t)t^3\right) = -\frac{nt^2}{2} + \beta(t)n^{-1/8},$$

alkalmas $\alpha(t)| \le$ const. és $\beta(t)| \le$ const. együtthatókkal, ha $|t| \le n^{3/8}$, ahonnan $e^{n(e^{it}-1-it)} = e^{-nt^2/2}e^{\beta(t)n^{-1/8}} = e^{-nt^2/2}\left(1 + \gamma(t)n^{-1/8}\right)$, $\gamma(t) \le$ const., ha $t \le n^{3/8}$, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}{\displaystyle\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2}\,dt} = 1.$$

Továbbá nem nehéz belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2}\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\,dt} = 1,$$

ezért elég megmutatni, hogy az $\displaystyle\int_{-\pi}^{-n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt$ és $\displaystyle\int_{n^{-3/8}}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt$ integrálok elég kicsik. Ennek bizonyításához jegyezzük viszont meg, hogy $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ tetszőleges z komplex számra, ahol $\operatorname{Re} z$ a z szám valós részét jelöli. Innen

$$|e^{n(e^{it}-1-it)}| = e^{n(\cos t-1)} \le e^{-\text{const.}\, n^{1/4}},$$

ha $n^{3/8} \le |t| \le \pi$, ahonnan következik a kívánt becslés.