A Valószínűségszámítás I. előadássorozat második előadása.
2002 február 5.

Összefoglaló:

Hogyan definiálhatjuk a korábban vizsgált problémákat leíró valószínűségi modelleket?

a.) Adjuk meg egy szabályos pénz tíz egymásutáni (független) dobás eredményeinek egy modelljét.

A természetes hozzáállás a következő: Vegyük az összes lehetséges 10 hosszúságú fej-írás sorozatot. Ezek lesznek az $\omega = (F, \dots, I, \dots)$ elemi események. Az Ω biztos esemény az összes lehetsége előbb definiált ω elemi eseményekből álló halmaz. Az $\mathcal{A}$ σ-algebra az Ω összes lehetséges részhalmazából áll.) Ilyen módon valóban σ-algebrát definiáltunk. Definiálnunk kell még a $P(A)$ valószínűségeket minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Ezt a következőképp tesszük: Minden ω elemi eseményre $P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, mert egy szabályos pénzdarab feldobásakor minden dobássorozatnak ennyi a valószínűsége. Végül $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra.

Egy pénzdarabot, mely $\frac{1}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel az írás oldalára feldobunk (egymástól függetlenül) 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.
Megoldás: Legyen ω egy elemi esemény egy 10 hosszúságú fej-írás sorozat. Tekintsük az összes ilyen sorozatból álló halmazt, ez legyen Ω, a biztos esemény. Legyenek a $\mathcal{A}$ σ-algebra elemei az Ω halmaz részhalmazai. (Az összes lehetséges részhalmazt tekintjük.) Definiálnunk kell még egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz (esemény) valószínűségét $P(A)$ is. Ezt a következő módon tesszük: $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, és $P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$, ha az ω elemi esemény olyan sorozat, amelyik k fej és $10-k$ írásjelből áll. (Ugyanis minden fej-dobás esetén $\frac{1}{3}$ és minden írás-dobás esetén $\frac{2}{3}$-dal, a fej, illetve írásdobás valószínűségével kell megszorozni a valószínűséget.)
Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót

a.) visszatevéssel,
b.) visszatevés nélkül.

Adjunk erre valószínűségi modellt mind a két esetben.
Megoldás: Az előző feladat megoldásához hasonló konstrukciót adhatunk. Legyenek az ω elemi események a 25 hosszúságú P, F (piros, fehér) jelekből álló sorozatok, az Ω biztos esemény az összes ilyen sorozatból álló halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazaiból álló halmaz, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra, és definiálnunk kell még a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Eddig a pontig az a.) és b.) esetet kielégítő konstrukció nem különbözött. A különbség az lesz, hogy a két esetben másképp fogjuk definiálni a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Az a.) esetben, amikor visszatevéssel húzzuk ki a golyókat, egy olyan ω valószínűsége, amelyik k P és $25-k$ F jelet tartalmaz $\left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{25-k}$, mert minden piros húzásnak $\frac{20}{50}$ és minden fehér húzásnak

$\frac{30}{50}$ a valószínűsége, (a húzás előtt az urnában levő piros illetve fehér golyók száma osztva az urnában levő golyók számával.) A b.) eseben, amikor visszatevés nélkül húzzuk a golyókat, egy olyan ω valószínűsége, amelyik k P és $25-k$ F jelet tartalmaz $\dfrac{20\cdot 19\cdots(20-k+1)\cdot 30\cdot 29\cdots(30-(25-k)+1)}{50\cdot 49\cdots 26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valószínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25}\dfrac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j-ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával, ha k fehér és $25-k$ piros húzás történt.

Házi feladat:

Egy szabályos dobókockát feldobunk 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.

Tárgyaljuk a következő problémát is: Egy pénzdarabot feldobunk *végtelen sokszor* egymás után. Annak vizsgálatához, hogy vajon igaz-e, hogy a fej-dobások számának relativ gyakorisága 1 valószínűséggel tart az $\frac{1}{2}$ számhoz, először definiálnunk kell egy olyan valószínűségi modellt, ahol ez a kérdés precízen megfogalmazható. Ezért definiálnunk kell olyan valószínűségi mezőt, ahol egyszerre tekinthetjük végtelen sok dobás eredményét. Ilyen konstrukció megadása lehetséges, de ez az előbb tárgyalt feladatoknál lényegesen nehezebb. Elkerülhetetlenül felmerülnek nehéz analízisbeli problémák.

A természetes hozzáállás a következő: Legyenek az ω elemi események a végtelen hosszú fej-írás sorozatok, az Ω biztos esemény pedig az összes ilyen sorozatból álló halmaz. Definiálnunk kell az Ω részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ σ-algebrát, és azon egy P valószínűséget. Ezt már nem tehetjük olyan egyszerűen mint a korábbi esetekben. Vegyük észre, hogy $P(\{\omega\})=0$ a definiciója minden végtelen dobássorozatnak, de mivel Ω kontinum sok (tehát több mint megszámlálható) elemi esemény uniója, ezért nem definiálhatjuk az A halmazok $P(A)$ valószínűségét olyan egyszerűen, mint tettük eddig. Tehát nem definiálhatjuk $P(A)$-t úgy mint az A halmaz által tartalmazott elemi események valószínűségének összegét. Finomabb deficiióra, érvelésre van szükség, és ennek az érvelésnek a segítségével nem tudjuk minden halmaznak a valószínűségét definiálni. Ez az oka annak, hogy a valószínűségi mező definiciójában bevezettük a σ-algebra fogalmát, amiben összegyüjtöttük az összes olyan halmazt (eseményt), melynek beszélünk a valószínűségéről.

Felmerülhet a kérdés: Nem okoz-e gondot az, hogy nem minden lehetséges halmaz valószínűségét definiáltuk. A válasz az, hogy nem. Ugyanis minket csak az olyan események (halmazok) valószínűsége érdekel, melyeket explicit módon meg tudunk adni. Viszont ezek benne vannak az általunk későbbiekben definiált σ-algebrában.

Minden $k=1,2,\dots$ számra, és k hosszúságú $(\cdots,F,\cdots,J,\cdots)$ sorozatra definiáljuk az

$$\begin{aligned}A_k(\cdots,F,\dots,I,\dots)=\{\omega\colon\omega \text{ olyan végtelen fej-írás sorozat,}\\ \text{melynek első } k \text{ jegye ez a } (\dots,F,\dots,I,\dots) \text{ sorozat}\}\end{aligned}\qquad (*)$$

halmazokat és ezek $P(A_k(\dots, F, \dots, I, \dots)) = 2^{-k}$ valószínűségét. Szemléletesen azt tettük, hogy tekintettük azokat az eseményeket, melyek azt írják le, hogy mi volt az első k dobás eredménye, és ezek valószínűségét úgy definiáltuk ahogy kell. Természetes elvárás, hogy az előbbi események legyenek benne a konstruálandó valószínűségi mező $\mathcal{A}$ σ-algebrájában, és ezek valószínűsége legyenek az előbb megadott számok. A valószínűségi mező definiciója lényegében ezen követelmények teljesítéséből áll. A formális definició megadása érdekében bizonyítsuk a következő egyszerű lemmát.

Lemma: *Legyen adva egy Ω halmaz, és Ω részhalmazainak valamilyen $\mathcal{F}_0$ rendszere. Létezik egy az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert tartalmazó legszűkebb σ-algebra, azaz egy olyan $\mathcal{F}$ σ-algebra, melyre igaz, hogy*

a.) $\mathcal{F}$ tartalmazza az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert, azaz, ha $F \in \mathcal{F}_0$, akkor $F \in \mathcal{F}$.

b.) Ha egy $\bar{\mathcal{F}}$ σ-algebra tartalmazza a $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert, akkor az tartalmazza a $\mathcal{F}$ σ-algebrát is, azaz, ha $F \in \mathcal{F}$, akkor $F \in \bar{\mathcal{F}}$.

Megjegyzés: A fenti $\mathcal{F}$ σ-algebrát szokták a $\mathcal{F}_0$ által generált σ-algebrának is hívni.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy létezik az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert tartalmazó σ-algebra. Ilyen például, az Ω összes részhalmazát tartalmazó σ-algebra. Tekintsük az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert tartalmazó összes $\mathcal{G}$ σ-algebra

$$\mathcal{F}^* = \bigcap_{\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}} \mathcal{G}$$

metszetét, ahol $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}$ azt jelenti, hogy a $\mathcal{G}$ σ-algebra tartalmazza az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert, a metszet pedig úgy értendő, hogy $F \in \bigcap \mathcal{G}$, ha $F \in \mathcal{G}$ a metszetben szereplő mindegyik $\mathcal{G}$ σ-algebrára. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{F}^*$ σ-algebra. Valóban, ha F_n, $n = 1, 2, \dots$ halmazokra igaz, hogy $F_n \in \mathcal{F}^*$, akkor az $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ halmazra szintén teljesül, hogy $F \in \mathcal{F}^*$. Ugyanis, ekkor minden $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}_0$ σ-algebrára, $F_n \in \mathcal{G}$, tehát a σ-algebra tulajdonság miatt $F \in \mathcal{G}$ az ilyen σ-algebrákra. Innen következik, hogy $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}^*$. Hasonlóan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}^*$, $\Omega \in \mathcal{F}^*$, és $\Omega \setminus F \in \mathcal{F}^*$, ha $F \in \mathcal{F}^*$.

Ezért $\mathcal{F}^*$ egy az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert tartalmazó σ-algebra. Innen, illetve $\mathcal{F}^*$ definiciójából viszont következik, hogy ez az $\mathcal{F}_0$-t tartalmazó legszűkebb σ-algebra.

Jelen esetben tekinthetjük az összes $(*)$ alakú halmazból álló $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert és az általa generált σ-algebrát. Ez lesz a definiálandó $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ rendszerben az $\mathcal{A}$ σ-algebra. Definiálnunk kell még a P valószínűségi mértéket is az $\mathcal{A}$ σ-algebrán. Ez lehetséges az alább kimondott, de ebben az előadássorozatban nem bizonyítandó tétel alapján.

Tétel. *Tekintsük az összes fej-írás sorozatból álló Ω halmaz $(*)$ képlet által definiált $A_k(F, \dots, I, \dots)$ alakú halmazokból álló $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert, és a $\mathcal{F}_0$ halmazrendszer által generált $\mathcal{A}$ σ-algebrát. Minden rögzített k-ra legyen $P(A_k(F, \dots, I, \dots) = 2^{-k}$ tetszőleges k-hosszú fej-írás sorozatra. (Azaz akárhogy is adjuk meg az első k dobás* *eredményét, annak valószínűsége, hogy ez bekövetkezik, legyen 2^{-k}.) Ekkor létezik az $\mathcal{A}$ σ-algebrán egy olyan egyértelműen meghatározott σ-additív mérték, mely teljesíti a fenti azonosságokot.*

A fenti eredmény azt jelenti, hogy létezik a természetes elvárásokat kielégítő valószínűségi mérték, sőt ezek a feltételek egyértelműen meghatározzák a $\mathcal{A}$ σ-algebra összes eseményének a valószínűségét. Megjegyezzük, hogy ez a nem-triviális eredmény valójában speciális esete egy általánosabb eredménynek. Ezeket az eredményeket itt nem tárgyaljuk, de az ezen előadáshoz írt Kiegészítésben megadom a kérdéskör vizsgálatához szükséges legfontosabb eredményeket. A részletek pontos kidolgozása a mértékelmélet tantárgy témája. Fazekas István könyve a 45. oldalon szintén tárgyalja ezt a problémát, sőt a könyv 7. fejezete (Appendix) további értékes információkat tartalmaz. Jelen szinten elégedjünk meg azzal a talán kissé pongyolán megfogalmazott állítással, hogy minden természetes módon felmerülő problémának meg lehet adni valószínűségi modelljét. Ezt a definiciót úgy lehet megadni, ahogy azt józan paraszti ésszel elvárjuk. Nehézséget az okoz, hogy a konstrukciók helyességének bizonyítása mély mértékelméleti eredmények ismeretét igényli.

Annak érdekében, hogy lássuk, a fenti konstrukció jól működik, lássuk be a következő állítást.

Állítás: *Tekintsük az előbb definiált valószínűségi mezőt, ahol a szabályos pénzdarab végtelen dobássorozatát definiáltuk. Adva egy ω végtelen fej-írás dobássorozat, jelölje $k(n,\omega)$ az ω sorozat első n jelében szereplő F betűk számát. Lássuk be, hogy az az A halmaz, melyet úgy definiálunk, hogy*

$$A = \left\{\omega : \textit{Létezik a } \lim_{n\to\infty} \frac{k(n,\omega)}{n} \textit{ határérték.}\right\}$$

teljesíti az $A \in \mathcal{A}$ tulajdonságot. Más szavakkal: Az az esemény, hogy a fejdobások relatív gyakoriságának van határértéke azon események közé tartozik, melyeknek definiáltuk a valószínűségét.

Bizonyítás Az, hogy a $\dfrac{k(n,\omega)}{n}$ sorozat, $n = 1, 2, \dots$ valamely ω-ra konvergál, ekvivalens azzal, hogy a $\dfrac{k(n,\omega)}{n}$ sorozat, $n = 1, 2, \dots$, Cauchy sorozat, ami azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon, \omega)$ küszöbindex, hogy $n \ge n_0$ és $\bar{n} \ge n_0$ esetén $\left|\dfrac{k(n,\omega)}{n} - \dfrac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}}\right| < \varepsilon$. Ez ekvivalens azzal, hogy minden k pozitív egész számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(k,\omega)$ küszöbindex, hogy $n \ge n_0$ és $\bar{n} \ge n_0$ esetén $\left|\dfrac{k(n,\omega)}{n} - \dfrac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}}\right| < \dfrac{1}{k}$.

Az, hogy ez az utóbbi állítás teljesül valamilyen k és n_0 számra, ekvivalens azzal, hogy $\omega \in A_{k,n_0}$, ahol

$$A_{k,n_0} = \left\{\omega\colon \left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}}\right| < \frac{1}{k} \quad \text{ha } n \ge n_0,\ \bar{n} \ge n_0\right\}$$

$$= \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcap_{\bar{n}=n_0}^{\infty} \left\{\omega\colon \left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}}\right| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Akkor létezik olyan $n_0 = n_0(k,\omega)$ küszöbindex, melyre $\left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}}\right| < \frac{1}{k}$ $n \geq n_0$ és $\bar{n} \geq n_0$ esetén, ha

$$\omega \in A_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{k,m}.$$

Akkkor Cauchy sorozat a $\frac{k(n,\omega)}{n}$ számsorozat, ha

$$\omega \in A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Vegyük észre, hogy az $\left\{\omega\colon \left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}}\right| < \frac{1}{k}\right\}$ halmaz minden előírt $(n,\bar{n})$ számpárra eleme az $\mathcal{A}$ σ-algebánák, mert megmondható, hogy mely $\max(n,\bar{n})$ fej és írásjellel kezdődő sorozatok tartoznak ehhez a halmazhoz, és melyek nem. Innen és a σ-algebra definiciójából viszont az is következik, hogy az halmazok segítségével definiált A_{k,n_0}, A_k halmazok minden k, n_0 indexre, valamint az A halmaz eleme az $\mathcal{A}$ σ-algebrának. Viszont az $A \in \mathcal{A}$ állítás az, amit bizonyítanunk kellllett.

Egy másik vizsgált probléma, melynek megoldása nem-triviális analízisbeli eredmények felhasználását igényli:

Ledobunk egymástól függetlenül egy x és egy y pontot egyenletesen a $[0,1]$ intervallumba, azaz mind az x mind az y pont $|b-a|$ valószínűséggel esik egy $[a,b] \subset [0,1]$ intervallumba. Az (x,y) számpár kijelöl egy véletlen pontot az egységnégyzeten. Mi annak a valószínűsége, hogy ez a pont beleesik az egységnégyzet valamely A halmazába?

Azt várjuk, hogy ez a valószínűség megegyezik a halmaz és az egységnégyzet metszetének a területével. Ez az elképzelés lényegében helyes, de természetesen csak azzal a megszorítással, hogy az állítás olyan halmazokra igaz, melyeknek van területük. Szeretnénk megfogalmazni az analízisnek azokat az eredményeit, melyek lehetővé teszik a szükséges valószínűségi modell leírását. Ezért felidézzük az analízisben szereplő Borel σ-algebra és Lebesgue mérték fogalmát.

Tekintsük az egységnégyzet $[a,b] \times [c,d]$ alakú részhalmazait, (melyek téglalapok), és definiáljuk ezek területét (Lebesgue mértékét) mint $(b-a)(d-c)$. Tekintsük azt a legszűkebb σ-algebrát, mely tartalmazza az összes ilyen alakú halmazt. Az összes ilyen halmazból álló rendszert hívják Borel féle σ-algebrának az egységnégyzeten. Az analízis egy fontos eredménye szerint a fenti téglalapokon definiált területet ki lehet terjeszteni a Borel féle σ-algebrára mint egy σ-additív halmazfüggvényt, és ez a kiterjesztés egyértelmű. Ezt a halmazfüggvényt hívják az irodalomban Lebesgue mértéknek.

Ezen eredmények segítségével definiálni tudunk egy számunkra kívánatos valószínűségi modellt. Legyenek az ω elemi események az egységnégyzet pontjai, Ω, a biztos esemény, a $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzet. Legyen $\mathcal{A}$ a Borel féle σ-algebrának az egységnégyzeten, a P mérték pedig a Lebesgue mérték ezen a σ-algebrán. Mutatunk két példát arra, hogy ennek a modellnek a megértése nagy segítséget jelenthet bizonyos feladatok megoldásában.

Első feladat: Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

Megoldás: Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember ember mikor érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x,y) pont az egységnégyzet

$$A = \left\{(x,y)\colon\ -\frac{1}{2} \le y - x \le \frac{1}{2}\right\} \cap [0,1] \times [0,1]$$

részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

Második feladat: Két egy méter hosszú botot véletlenszerűen, (egymástól függetlenül) egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott új bot hossza kisebb mint 0.8 méter?

Megoldás: Ez a feladat is hasonló módon tárgyalható. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint 0.8 megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x,y) pont a következő A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazok $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ uniójába esik: $A_1 = \{(x,y)\colon x+y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_2 = \{(x,y)\colon x + (1-y) < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_3 = \{(x,y)\colon 1 - x + y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$ és $A_4 = \{(x,y)\colon 1 - x + 1 - y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$. Rajzoljuk le ezeket a halmazokat. Az ábra mutatja, hogy az $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ halmaz komplementere az a négyzet melynek csúcsai a (0.3, 0.5), (0.5, 0,3), (0.7, 0.5), és (0.5, 0.7) pontok. Ennek a négyzetnek a területe, 0.08 tehát a minket érdeklő valószínűség $1 - 0.08 = 0.92$.

Később tanulni fogunk olyan módszereket, melyek lehetővé teszik e két feladat megoldását más módon. Akkor majd vissza fogunk térni ezekhez a feladatokhoz.

A valószínűség definiciójában feltettük, hogy a valószínűségi mérték nemcsak additív, hanem σ-additív is. Ez kényelmesebbé teszi a számolásokat, és ezenkívül ez tette lehetővé a végtelen dobássorozatot definiáló valószínűségi mérték illetve a pontledobást leíró Lebesgue mérték *egyértelmű* definicióját. Érdemes megérteni a σ-additív és additív halmazfüggvények közötti kapcsolatot. A Fazekas könyv 23. oldalán található egy állítás (2.5 Állítás) arról, hogy a σ-additivitás az ekvivalens azzal, hogy az additívításon kívül még egy mérték folytonosságának nevezett tulajdonság is teljesül. Ezt az állítást alább megfogalmazom az alábbi Tétel A eredményében, és annak (egyszerű) bizonyítását megadom a Kiegészítésben.

Tétel A. *Legyen adva egy Ω halmaz, annak bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ σ-algebra, és azon egy P addítiv nem-negatív halmazfüggvény, azaz feltesszük, hogy $0 \le P(A) < \infty$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra, és $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ha A és B diszjunkt halmazok. A P halmazfüggvény akkor és csak akkor σ-additív a $\mathcal{A}$ σ-algebrán, ha teljesíti az alábbi a mérték folytonosságának nevezett tulajdonságot:*

Ha $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ az $\mathcal{A}$ σ-algebra olyan elemei, melyekre

$$\cdots \subset A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1, \quad \text{és} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

A fenti állítás akkor is érvényes, ha az $\mathcal{A}$ algebra, de nem feltételenül σ-algebra. Ez esetben a σ-additívitás úgy értendő, hogy amennyiben az A_n, $n = 1, 2, \dots,$ halmazok diszjunktak, $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és ezenkívül az $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ feltétel is teljesül, akkor $P(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Világos, hogy legalábbis formálisan a σ-addititás erősebb követelmény mint csak az additivitás. De tudunk-e példát adni egy σ-algebrán additív, de nem σ-additív halmazfüggvényre? Elképzelhető-e, hogy a σ-additivítás előírása miatt bizonyos érdekes feladatokra nem tudunk valószínűségi modellt adni?

Ezekre a kérdésekre megnyugtató választ tudunk adni. Léteznek σ-algebrán additív, de nem σ-additív halmazfüggvények. Ezeket viszont mindig csak nem konstruktív módon (kiválasztási axióma vagy egy vele ekvivalens állítás segítségével lehet megadni.) Tehát konkrét, jól megfogalmazható feladatokban nem jelenik meg az a probléma, hogy a valószínűséget megadó természetes jelölt additív, de nem σ-additív.

Végül a valószínűségi modellek konstrukciója kapcsán még egy megjegyzés. A megadott konstrukciók jó konstrukciók, de nem az egyedül jó konstrukciók. Például egy szabályos pénzdarab 10 egymás utáni feldaobására az is lehet modell, hogy a pénzdarabot, 20 alkalommal dobjuk fel, de az utolsó tíz dobás eredményét nem vesszük figyelembe. Jegyezzük meg azt is, hogy a vizsgált feladatokban a valószínűségek kiszámolásában nem játszott szerepet, hogy a kívánt feladatnak milyen (a feladat feltételeit kielégítő) modelljét tekintjük.

Feltételes valószínűség

Annak érdekében, hogy megértsük, milyen fogalmat probálunk pontosan megfogalmazni tekintsük a következő példát. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 10 alkalommmal. Válaszoljuk meg a következő két kérdést:

a.) Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 6 fejdobás történik?

b.) Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 6 fejdobás történik, ha tudjuk, hogy az első pénzdobás eredménye fej?

Az a.) kérdésre a válasz az, hogy $\binom{10}{6}2^{-10}$, mert $\binom{10}{6}$ egymást kizáró eseményt kell figyelembe venni, és ezek mindegyikének a valószínűsége 2^{-10}. A b.) kérdésre a válasz az, hogy $\binom{9}{5}2^{-9}$, mert $\binom{9}{5}$ egymást kizáró eseményt kell figyelembe venni, és ezek mindegyikének a valószínűsége 2^{-9}. Tehát, ha van valamilyen plusz információnk, akkor az befolyásolhatja értékelésünket arról, hogy mi egy adott esemény valószínűsége. A feltételes valószínűség foglama ezt az elképzelést önti formába. A formális definició a következő:

Feltételes valószínűség definiciója. *Adva egy B esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melyre $P(B) > 0$, egy ugyanezen a valószínűségi mezőn lévő A esemény feltételes valószínűsége feltéve a B eseményt (azaz a B esemény bekövetkezését)*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Megjegyzés: Csak pozitív valószínűségi B események, azaz $P(B) > 0$ esetén definiáljuk a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget.

E definició szemléletes tartalma a következő. Ha a B esemény bekövetkezik, akkor minden a B eseményt kizáró esemény feltételes valószínűsége, (feltéve a B eseményt) nulla, továbbá tetszőleges A esemény feltételes valószínűsége megegyezik az $A \cap B$ esemény feltételes valószínűségével. Természetes feltenni, hogy az $A \cap B$ esemény $P(A \cap B|B)$ feltételes valószínűsége arányos ezen esemény $P(A \cap B)$ valószínűségével. Mivel $P(B|B) = 1$, ez sugallja a fenti definicót.

A feltételes valószínűségre érvényes néhány egyszerű, de gyakorlati alkalmazásokban fontos összefüggés. Mielőtt ezek tárgyalására térnénk, tekintsük a következő feladatot:

Feladat: Reggel valaki hazulról elmenve a lakáskulcsot elteszi, mégpedig úgy, hogy 0.5 valószínűséggel teszi a kabátzsebébe, 0.3 valószínűséggel a nadrágzsebébe és 0.2 valószínűséggel a mellényzsebébe. A nap folyamán mindenfelé jár, ezért a lakáskulcs a kabátzsebéből 0.1, a nadrágzsebéből 0.2, a mellényzsebéből viszont 0 valószínűséggel esik ki. Este hazatérve emberünk először a kabát majd a nadrágzsebében keresi a kulcsot, de egyik helyen sem találja. Mi annak a valószínűsége, hogy a lakáskulcs ott van a mellényzsebében?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy emberünk a lakáskulcsot a kabát A_2, hogy a nadrág és A_3, hogy a mellényzsebébe tette. Jelölje továbbá B azt az eseményt, hogy a kulcs nem veszett el. Ekkor feltételeink szerint az A_1, A_2 és A_3 események egymást kizáróak, $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$ továbbá $P(B|A_1) = 0.9$, $P(B|A_2) = 0.8$ és $P(B|A_3) = 1$. Vezessük be a $C = (\bar{B} \cap A_1) \cup (\bar{B} \cap A_2) \cup A_3$ eseményt. Ekkor C jelenti azt az eseményt, hogy emberünk este nem találta a lakáskulcsot sem a kabát sem a nadrágzsebében. Ezért minket a $P(B|C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(C) = P(A_1 \cap \bar{B}) + P(A_2 \cap \bar{B}) + P(A_3) = P(\bar{B}|A_1)P(A_1) + P(\bar{B}|A_2)P(A_2) + P(A_3) = 0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2 = 0.31$, és $P(B \cap C) = P(B \cap A_3) = P(A_3) = 0.2$. Innen a minket érdeklő feltételes valószínűség értéke $\dfrac{0.2}{0.31} = \dfrac{20}{31}$.

Kiegészítés:

A Tétel A bizonyítása. Lássuk először be, hogy amennyiben a P halmazfüggvény nemcsak additív, hanem σ-additív is, akkor teljesíti a folytonossági tulajdonságot: Legyenek $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ az $\mathcal{A}$ (σ)-algebra olyan elemei, melyekre $\cdots \subset A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1$, és $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Definiáljuk a (diszjunkt) $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, halmazokat. Ekkor $A_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} B_k$, $n = 1, 2, \dots$, ezért a P halmazfüggvény σ-additívitása alapján $P(A_n) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(B_k)$. Speciálisan, $P(A_1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k) < \infty$. Ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbindex, melyre teljesül, hogy $P(A_n) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(B_k) < \varepsilon$, ha $n \ge n_0$, és ezt kellett belátni.

Ha a P halmazfüggvény additív, és teljesíti a folytonossági feltételt, akkor tekintsük $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ diszjunkt halmazok tetszőleges rendszerét, legyen $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, $n = 1, 2, \dots$. (Jegyezzük meg, hogy akkor is tudjuk, hogy $B_n \in \mathcal{A}$, ha $\mathcal{A}$ algebra, de nem feltétlenül σ-algebra. Ugyanis feltettük, hogy $B_1 \in \mathcal{A}$, ezért $B_n = B_1 \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \right) \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre.) Ekkor $\cdots \subset B_n \subset B_{n-1} \subset \cdots \subset B_1$, és $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, ezért a P halmazfüggvény folytonossági tulajdonsága miatt $\lim\limits_{n \to \infty} P(B_n) = 0$. Ezért tetszőleges N pozitív egész számra

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{N-1} A_n \right) + P(B_N) = \sum_{n=1}^{N-1} P(A_n) + P(B_N).$$

Mivel $\lim\limits_{N \to \infty} P(B_N) = 0$, innen $N \to \infty$ határátmenettel megkapjuk a kívánt állítást.

A valószínűségi modellekben szereplő P valószínűségi mértékek σ-additívitásának igazolásában alapvető szerepet játszik a mértékelmélet alábbi, itt nem bizonyítandó nagyon fontos eredménye:

Carathéodory tétele mértékek egyértelmű kiterjesztéséről. *Legyen adva egy nem-negatív véges μ mérték (azaz σ-additív halmazfüggvény) egy Ω halmaz bízonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{A}_0$ algebrán. Ekkor a μ mérték egyértelműen kiterjeszthető az $\mathcal{A}_0$ által generált $\mathcal{A}$ σ-algebrára.*

Megjegyzés: Fontos, hogy ez az eredmény nemcsak a mérték kiterjeszthetőségét állítja, hanem annak egyértelműségét is. Ez azt jelenti, hogy a generált σ-algebrában szereplő halmazok mértékét (a minket érdeklő alkalmazások esetében valószínűségét) egyértelműen tudjuk definiálni.

A fenti eredmény önmagában nem elegendő az előadásban tekintett szabályos pénzdarab végtelen dobássorozatokat leíró modell helyességének a bizonyításához. Meg kell ugyanis először adni azt az $\mathcal{A}_0$ algebrát és rajta azt a σ-additív halmazfüggvényt, melyre a tételt alkalmazhatjuk.

Jelen példában természetes módon definiálhatjuk azt az $\mathcal{A}_0$ algebrát és a rajta értelmezett P mértéket, melyre a Carathéodory tételt alkalmazni kívánjuk. Nevezetesen, álljon $\mathcal{A}_0$ az összes lehetséges végtelen fej–írást tartalmazó Ω halmaz azon részhalmazaiból, melyek csak véges sok koordinátától függnek, azaz egy A halmaz akkor és csak akkor tartozik a $\mathcal{A}_0$ algebrához, ha létezik egy k pozitív egész szám és k-hosszúságú fej–írás sorozatoknak egy B halmaza, melyre igaz, hogy egy végtelen fej-írás sorozat akkor és csak akkor tartozik az A halmazba, ha az első k tagjából álló k hosszúségú fej–írás sorozat a B halmazhoz tartozik. (Az ilyen tipusú halmazokat hívják az irodalomban henger-halmazoknak.) Továbbá, legyen egy ilyen A halmaz P mértéke a B halmaz mértéke szorozva a 2^{-k} számmal.

Nem nehéz belátni, hogy ilyen módon egy $\mathcal{A}_0$ algebrát definiáltunk, és azon egy P nem–negatív egyre normált additív halmazfüggvényt. Viszont korántsem nyílvánvaló, hogy a P addítiv halmazfüggvény egyben σ–additív is. Ez utóbbi állítás bizonyításához érdemes felhasználni a Tétel A eredményét, mely szerint a P halmazfüggvény σ–additívitásának bizonyításához elég belátni, hogy az teljesíti a Tétel A-ban megfogalmazott folytonossági tulajdonságot. Ez utóbbi állítást azért viszonylag könnyű ellenőrizni, mert mint az elemien (bár nem teljesen triviálisan) megmutatható, ha a fent-definiált hengerhalmazok egy egymásba skatulyázott sorozatának a metszete üres, akkor megadható e hengerhalmazok között véges sok is úgy, hogy ezek metszete üres.

Érdemes megjegyezni, hogy ha hasonló eredményeket akarunk belátni általánosabb modellekben, akkor a fent vázolt módszer adaptálható, de az érvelés az analízis néhány mély ,,absztrakt” eredményét is felhasználja. így például nagyon hasznos az ilyen érvelésekben a topológia egyik alapvető, mély eredménye, a Tihonov tétel. Ez az eredmény azt állítja, hogy kompakt topológikus terek direkt szorzata is kompakt topológikus tér. Végül az utolsónak említett eredmény is egy általánosabb topológiai eredménynek a speciális esete. E szerint az eredmény szerint, ha egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszete üres, akkor megadható ezen kompakt halmazok véges sok tagja is úgy, hogy azok metszete üres.